紧扣物理规律 着重思维训练 培养物理建模能力

—— 以碰撞模型为例

李　惠

(株洲市第二中学　湖南 株洲　412000)

(收稿日期:2019-12-25)

摘　要:以一道有关碰撞的自主招生试题为例,浅谈在中学生物理竞赛中如何紧扣物理规律,层层递进地进行思维训练,培养学生的物理建模能力.

关键词:碰撞　竞赛培训　物理建模

【例题】 水平光滑大桌面上有一质量为 M 的均匀圆环形细管道,管道内有两个质量同为 m 的小球 A 和 B 位于管道同一直径的两端. $t=0$ 时刻管道静止,小球 A 和 B 沿着切线方向有相同的初速度 v_0,如图 1 所示. 不计一切摩擦.

(1) 两个小球在管道内第一次相碰前瞬间的相对速度大小.

(2) 设两个小球的碰撞是弹性的,分析两小球碰后能否在管道内返回初始时刻相对管道的位置?

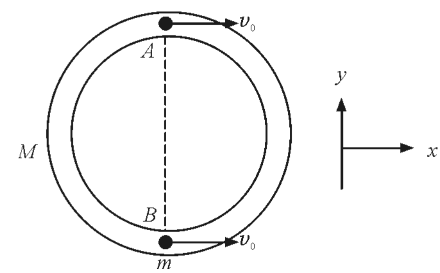

图 1　例题题图

用时左手按住大齿轮,在大齿轮里放一只小齿轮,把笔尖插进小齿轮的某一个孔里,让小齿轮紧贴大齿轮内壁滚动,这时笔尖就会在纸上画出许多美丽的曲线花纹. 若将大齿轮换成带齿的直尺,画出来的曲线就是"最速降线",如图 9 所示.

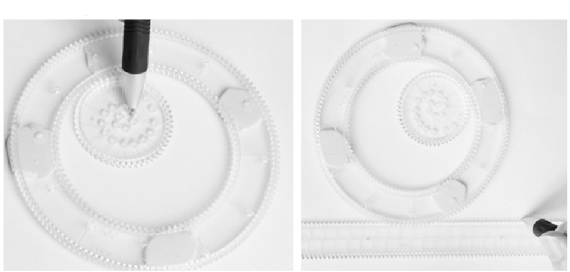

图 9　繁花曲线规

5.4　"最速降线"在医学上的应用

药物进入体内的方式有 3 种常见形式,即快速静脉注射、口服或肌注,医学上常用"房室系统"的观点来研究药物在体内的吸收、分布和排除过程,若能结合"最速降线"研究 3 种情况下体内血药浓度的变化曲线,将有助于得到血药浓度的变化,从而根据不同的疾病利用"药物动力学"找出最佳治疗方案[4].

6　结束语

由于"最速降线"问题对大部分中学生而言过于困难,本文在"STEM"理念的基础上,从"S"与"M"的角度分析并简化了"最速降线"分析,从"T"的角度进行了计算验证与实验验证,最后从"E"的角度推广与拓展该模型,从中我们可以领略到该理念分析解决问题的强大能力 —— 不仅可以更加系统、简便的研究、验证"最速降线",甚至可以更高效地在生活中应用"最速降线".

参 考 文 献

1　钱伟长. 广义变分原理[M]. 上海:知识出版社,1995. 27 ~ 28

2　刘志勇,边军辉,刘培国. Mathematica 在最速降线问题中的应用[J]. 西安文理学院学报(自然科学版),2013,16(1):91 ~ 94

3　徐绍辉. 基于 CAAD 的剧场观众厅若干问题设计研究[D]. 北京:清华大学,2011

4　张继稳,钟大放,毕殿洲. 单室模型药物血管外给药零级、一级释放药物动力学[J]. 中国药理学通报,2005(02):245 ~ 248

(3) 若能，再通过计算确定两小球到达这个位置时相对于大桌面的速度方向.

这是 2008 年北京大学自主招生考试的最后一题. 笔者选择这道题作为讲解完一维对心碰撞模型后的一道习题对学生做竞赛培训，在培训中，为了让学生能进一步深化物理规律，笔者在此题的基础上，设计了 3 处改动，着重对学生思维能力的训练，以期能够在较短时间内建立起正确而适合的物理模型来解决新的问题. 本文把这一培训过程展现出来.

1　参照一维碰撞模型 紧扣物理规律 引导学生提炼“新”情境中的“旧”规律

我们来回顾一维碰撞模型，为了更直观地“看到”碰撞这一极短时间内的内力作用过程，我们可以在参与碰撞的两个小球之间添加一根轻质弹簧，弹簧只与其中一个小球焊接，观察弹簧的形变就可以了解碰撞过程中内力的作用规律(其实，在弹簧弹力作用的时间内，这就是一个复振子系统). 如图 2 所示. 他们之间对应的联系如表 1 所示. 碰后 1 球和 2 球的速度分别用 v_1' 和 v_2' 表示.

$$v_1'=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}v_2$$

$$v_2'=\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}v_2+\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}v_1$$

$$\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

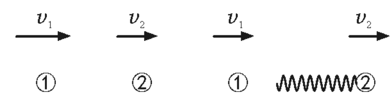

图 2　一维碰撞模型分析

表 1　两球碰撞与复振子系统之间的联系

		两球碰撞	复振子
碰前		两球有各自的速度	两球有各自的速度，弹簧处于原长状态
碰撞过程及碰后状态	完全非弹性碰撞	1 球一直减速，2 球一直加速，内力的冲量使 1 球的动量向 2 球转移. 当两者等速时结束碰撞. 系统损失的动能转化为内能	1 球一直减速，2 球一直加速，弹簧弹力的冲量使 1 球的动量向 2 球转移. 当两者等速时结束碰撞. 系统损失的动能转化为弹性势能
	一般非弹性碰撞	1 球一直减速，2 球一直加速，当两者等速时相互作用力仍然继续存在，使 2 球速度大于 1 球速度，两者分开. 系统动能损失转化为内能	1 球一直减速，2 球一直加速，当两者等速时弹力仍然继续存在，使 2 球速度大于 1 球速度，在弹簧恢复原长之前撤离弹簧，两球的状态等同于完成了一次一般非弹性碰撞后的末状态
	弹性碰撞	1 球一直减速，2 球一直加速，当系统动能恢复到碰前的数值时结束碰撞	1 球一直减速，2 球一直加速，当系统动能恢复到碰前的数值、弹簧恢复原长时撤离弹簧，两球的状态相当于发生了一次完全弹性碰撞

1.1　新情境“新”在何处?

有 3 个物体参与相互作用，且运动是二维运动.

1.2　新情境中蕴含“旧”规律

由于对称性，两小球对大圆环的作用力的合力是沿 x 方向的，两小球的第一次碰撞位置应该是相对大圆环转过 $\frac{1}{4}$ 圆周处，相对大圆环的相对速度沿 y 轴方向，三者在 x 方向是相对静止的. 又因为系统在 x 轴方向动量是守恒的，所以发生第一次碰撞前瞬间，三者具有相同的 x 方向分速度，相当于在 x 轴方向完成了一次完全非弹性碰撞. 把两小球的整体看成是碰撞模型中的 1 球，把大圆环看成是 2 球，则这个完全非弹性碰撞中的动能“损失”恰好为两小球 y 轴方向分速度对应的动能. 即

$$2\times\frac{1}{2}mv_y^2=\frac{1}{2}\frac{2mM}{2m+M}v_0^2$$

所以，两小球第一次碰前相对速度大小为

$$2v_y=2\sqrt{\frac{M}{2m+M}}v_0$$

原题第(1)问得解.

假设两小球碰后能回到与初始时刻一样的相对大圆环的位置，则小球相对大圆环的速度是 x 轴方向，大圆环相对大桌面的速度也沿 x 轴方向，所以系统不存在 y 轴方向速度，则整个过程相当于一次 x 轴方向的完全弹性碰撞，代入公式得小球碰后速度

$$v_1'=\frac{2m-M}{2m+M}v_0$$

可以看到，若 $2m>M$，则小球相对大桌面的速度朝右，若 $2m<M$，则小球相对大桌面的速度朝

左,若 $2m=M$,则速度交换,小球速度为零.原题第(2)、(3)问得解.

综上所述,物理有助于我们在新的物理情境中更清晰、快速地找到其内在的物理规律,返璞归真,体会到物理规律的逻辑美.

2　深挖物理内涵 创设各种角度 引领学生做思维训练

笔者不改变题干设定,适当改变设问的方式和角度,启发学生去思考.

(1)小球能否发生第二次、第三次碰撞?

这个问题主要是引导学生探究 $t=0$ 时刻之后很长一段时间内的运动规律.引导学生去分析为什么大圆环和两小球构成的系统质心会一直做匀速直线运动,而在质心系中两小球每碰撞 2 次之后,3 个物体就会回到与 $t=0$ 时刻一样的相对位置.可见,在质心系中,三者的运动是周期往复的.

(2)假设大圆环、两小球三者质量相等均为 m,假设 A,B 间碰撞的恢复系数为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,求第二次碰撞前瞬间 A 球相对大桌面的相对速度大小.

这个问题主要在于引导学生对非弹性碰撞模型和弹性碰撞模型的特点进行比较.

解析:从 $t=0$ 时刻开始到第一次碰撞前瞬间,x 轴方向完成了一次完全非弹性碰撞,如上所述,A,B 球碰前的相对速度为

$$2v_y=2\sqrt{\frac{m}{2m+m}}v_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}v_0$$

三者的 x 轴方向达到共速

$$v'_x=\frac{2mv_0}{3m}=\frac{2}{3}v_0$$

已知恢复系数,可求碰后相对速度大小为

$$2v'_y=2ev_y=\frac{2}{3}v_0$$

又根据从第一次碰撞后瞬间到第二次碰撞前瞬间,系统在 x 轴方向相当于完成了一次弹性碰撞,A,B 球在这个过程的初末状态速度的 x 分量相同,y 分量等大反向,可得 A 球相对大桌面的相对速度大小为 $v_A=\sqrt{v'^2_x+v'^2_y}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}v_0$.

(3)假设圆环形细管道与 A,B 小球质量相等均为 m,且有两个对称的缺口 P_1 和 P_2,如图 3 所示,位置已经由方位角 φ 标定,A,B 球将在缺口处穿出,在大桌面上某处相碰.求相碰时两球与管道中心 O 之间的距离以及两球从缺口穿出后到小球相碰的过程中圆环形细管道经过的路程[1].

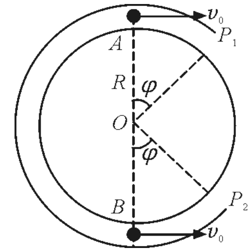

图 3　圆环形轨道的两个对称缺口

这个问题旨在引导学生在不同的参考系中观察物体的运动.先以细管为参考系,设小球穿出前的运动看成是随圆环形细管以 u 的速度的同时相对大圆环做速度为 v 的圆周运动,A,B 球相对大圆环从缺口处穿出后三者都做匀速直线运动,如图 4 所示.所以,两小球会在 Q 点碰撞,此时 Q 与 O 之间的距离为

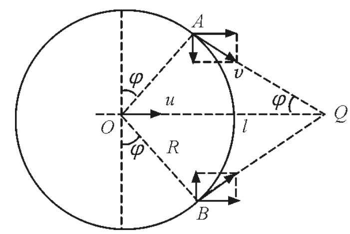

图 4　两球从缺口处穿出在 Q 点碰撞

$$l=\frac{R}{\sin\varphi}$$

设小球穿出缺口到相碰经历时间 t,小球相对管道经过路程为

$$R\cot\varphi=vt$$

接下来我们回到实验室参考系,在上述这段时间内,圆环形细管相对大桌面经过的路程为

$$s=ut=\frac{u}{v}R\cot\varphi$$

又穿出前系统动量守恒、机械能守恒

$$mu+2m(v\cos\varphi+u)=2mv_0$$

$$\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}2m[(v\sin\varphi)^2+(v\cos\varphi+u)^2]=\frac{1}{2}2mv_0^2$$

解得 $s=\dfrac{2}{3}R(\sqrt{1+2\sin^2\varphi}-\cos\varphi)\cot\varphi$.

以上就是笔者在实际的物理竞赛培训时对一道习题的处理方式,可操作性强,学生积极性很高,思维训练量大,学生能紧扣物理内在规律,建模能力得到了非常明显的提高.

参 考 文 献

1　舒幼生.力学[M].北京:北京大学出版社,2005.94～95