

# 推导匀强电场中导体球的电荷面密度的简单方法

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2014-11-14)

**摘要:**通过推导一个数学结论和电偶极子的场强公式,利用均匀带电球体内部场强公式、等量异号电荷模型、镜像电荷模型和偶极子模型以及等效法和叠加法,对匀强电场中导体球的电荷面密度的关系式给出两种巧妙的推导方法.

**关键词:**月牙形 导体球 等效法 电荷面密度

对于匀强电场中的导体球的电荷面密度关系式,在电动力学教材和一些物理文献中,是利用拉普拉斯方程和勒让德函数进行推导的,比较高深.下面利用一些等效物理模型和有关数学知识,对匀强电

场中的导体球感应电荷面密度关系式给出两种简单的推导方法.

首先推导一个简单的数学结论.如图1(a)所示,两个大小相等的圆不重合,相交于两点 $M$ 和 $N$ ,

第25届竞赛出了这么一道填空题<sup>[9]</sup>:核潜艇中 $U^{238}$ 核的半衰期为 $4.5 \times 10^9$ 年,衰变中有0.7%的概率成为 $U^{234}$ 核,同时放出一个高能光子,这些光子中的93%被潜艇钢板吸收.1981年,前苏联编号U137的核潜艇透射到艇外的高能光子被距核源(处理为点状)1.5 m处的探测器测得.仪器正入射面积为 $22 \text{ cm}^2$ ,效率为0.25%(每400个入射光子可产生1个脉冲讯号),每小时测得125个讯号.据上所述,可知 $U^{238}$ 核的平均寿命 $\tau = \underline{\hspace{2cm}}$ 年( $\ln 2 = 0.693$ ),该核潜艇中 $U^{238}$ 的质量 $m = \underline{\hspace{2cm}}$  kg(给出2位数字).

这个题目除了考核基本的物理原理(核衰变规律 $N = N_0 e^{-\lambda t}$ 及半衰期、平均寿命与常量 $\lambda$ 的关系)外,还考核学生是否能够正确理解和运用题目中所给的各个数据.笔者以为,该题比较贴近实际,能够激发学生的联想和探索精神.

## 4 结语

本文对全国部分地区大学生物理竞赛近代物理试题进行了统计,分析了各条知识的占比情况,剖析了近代物理试题的特点.近代物理试题要求考生需具有扎实的知识基础,需要牢固掌握基本概念和原

理、具备基本的分析、解决问题的能力.在以后的竞赛中,期待命题专家能够设计一些联系实际(如航天、新能源、新材料等)的近代物理问题.

## 参考文献

- 1 刘家福,张昌芳.大学生物理竞赛及其试题特色.物理与工程,2008,18(4):65
- 2 刘家福,张昌芳.大学生物理竞赛试题赏析(I)——力学部分.物理通报,2014(10):54~56
- 3 教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理基础课程教学指导分委员会.理工科类大学物理课程教学基本要求.2010年版.北京:高等教育出版社,2010.1
- 4 刘家福,张昌芳.大学生物理竞赛试题赏析(III)——电磁学部分.物理通报,2015(5):43~47
- 5 工科物理编辑部.全国部分地区非物理类专业大学生物理竞赛题解汇编(第1~13届).北京:工科物理,1997.26
- 6 刘家福,赵丽丽.一个狭义相对论问题的多种解法.北京师范大学学报(自然科学版),2012,48(增刊):110
- 7 北京物理学会编印.第24届全国部分地区大学生物理竞赛试卷.2007.8
- 8 北京物理学会编印.第28届全国部分地区大学生物理竞赛试卷.2011.3
- 9 北京物理学会编印.第25届全国部分地区大学生物理竞赛试卷.2008.3

相交弦同侧的优弧与劣弧围成一个月牙形. 两圆心  $O_1$  与  $O_2$  连线的中点为  $O$ , 过点  $O$  作径向直线  $OA$  交优弧于点  $A$ , 交劣弧于点  $B$ , 把线段  $AB$  称为月牙弦. 设直线  $OA$  偏离中轴线的角度为  $\theta$ , 两个圆心错开的距离为  $d$ , 月牙弦的长度为  $h = AB = OA - OB$ , 其最大值为  $d$ , 最小值为零. 弦长  $h$  随直线  $OA$  的偏角  $\theta$  而变化,  $\theta$  越大, 对应的弦长越小, 那么弦长  $h$  与最大弦长  $d$  和偏角  $\theta$  的数量关系是什么呢?

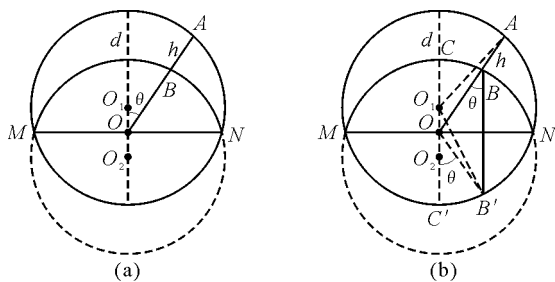


图 1

为了求弦长  $h$ , 需分别求出  $OA$  和  $OB$  的长度, 可通过构造两个三角形利用余弦定理来求. 如图 1(b) 所示, 连接  $O_1A$ , 得到一个三角形  $O_1OA$ , 其中半径  $R = O_1A$  所对的角度即直线  $OA$  与月牙形的中轴线的夹角为  $\theta$ ; 两圆的公共弦为  $MN$ , 劣弧  $MCN$  与劣弧  $MC'N$  关于直线  $MN$  对称, 过点  $B$  作  $MN$  的垂线, 与劣弧  $MC'N$  交于点  $B'$ , 连接  $OB'$ , 则  $OB = OB'$ , 由对称性可知  $OB'$  与  $OC'$  的夹角也为  $\theta$ . 连接  $O_1B'$ , 又得到一个三角形  $O_1OB'$ , 其中半径  $R = O_1B'$  所对的角度为  $180^\circ - \theta$ .

设  $OO_1 = l$ , 则  $O_1O_2 = d = 2l$ . 对三角形  $O_1OA$  和  $O_1OB'$  分别由余弦定理得

$$R^2 = l^2 + OA^2 - OA \cdot 2l \cos \theta$$

$$R^2 = l^2 + OB'^2 + OB' \cdot 2l \cos \theta$$

两式联立可得

$$OA - OB' = 2l \cos \theta$$

由于

$$OB' = OB \quad 2l = d$$

所以月牙形的弦长为

$$h = AB = d \cos \theta$$

**结论:** 两个重合的圆错开距离  $d$  而形成月牙形, 若过两圆心连线中点的直线与月牙形中轴线的夹角为  $\theta$ , 则月牙形截得直线的长度即月牙弦的长度为

$h = d \cos \theta$ , 是余弦函数.

该数学结论对于空间月牙体同样适用. 下面利用这个结论推导匀强电场中导体球的电荷面密度.

**【例 1】** 如图 2(a) 所示, 在电场强度为  $E_0$  的匀强电场中, 放着一个半径为  $R$  的金属球. 若球面上的一点  $A$  对应的半径与场强正方向的夹角为  $\theta$ , 求金属球表面的感应电荷面密度  $\sigma$  与角度  $\theta$  的关系式.

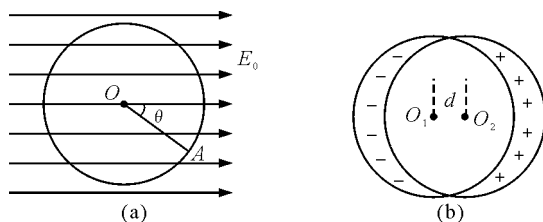


图 2

**解法 1:** 利用数学结论和均匀带电球体模型

对于在匀强电场中的金属球, 左侧表面出现负电荷, 右侧表面出现正电荷, 球内合场强为零, 即球面感应电荷在球内产生匀强电场, 场强大小也为  $E_0$ , 但方向相反. 因此可利用两个大小相同的均匀带有等量异号电荷的球体交叠来构建匀强电场中导体球的等效模型, 即分别在两个半径为  $R$  的绝缘球内均匀分布等量异号电荷, 左球带负电, 右球带正电, 设想将两球互相交叠放入匀强电场中, 球心不重合, 而是沿电场方向稍微错开距离  $d$ , 如图 2(b) 所示, 两球重叠部分正负电荷中和而形成电中性的空腔, 即空腔内的电荷体密度为零; 在边缘形成两个月牙体, 其中电荷按原密度均匀分布.

当  $d \rightarrow 0$  时, 空腔趋近于半径为  $R$  的球体, 月牙体几乎趋近于两个半球的表面. 这与原题中的物理模型在空间几何图形上是等效的; 虽然月牙体均匀带电, 但由于月牙体的厚度不均匀, 因此离中轴线越近, 电荷量越大, 这与匀强电场中的导体球表面感应电荷的分布情况相一致, 所以两个物理模型在电荷分布趋势及对称性上是等效的.

可以证明, 对于半径为  $R$ , 均匀带电  $Q$  的球体内部距球心为  $r$  处的场强公式为

$$E_r = \frac{kQr}{R^3}$$

再推导两个大小相同的均匀带电的球体叠加区

域的场强公式. 如图 3(a) 所示, 设左、右两球所带的电荷量分别为  $-Q$  和  $+Q$ , 可认为分别集中于球心  $O_1$  和  $O_2$  的点电荷, 在重叠区域任取一点  $P$ , 对两个球心的矢径分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 方向都指向点  $P$ , 则负电荷在  $P$  点产生的场强矢量为

$$E_1 = -\frac{kQ}{R^3}r_1$$

正电荷在  $P$  点产生的场强矢量为

$$E_2 = \frac{kQ}{R^3}r_2$$

由矢量三角形可知点  $P$  处的合场强为

$$E = E_2 + E_1 = \frac{kQ}{R^3}(r_2 - r_1) = \frac{kQ}{R^3}d$$

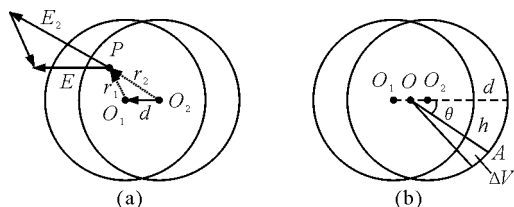


图 3

由于两球心连线  $O_2O_1$  对应的矢量  $d_1$  的大小恒定, 方向恒定, 则场强  $E$  恒定, 表明在两球体重叠区域的电场为匀强电场, 即两个月牙形带电体在空腔内产生匀强电场, 方向与外电场相反, 使叠加区域内的合场强为零, 这与匀强电场中的导体球内合场强为零的情况完全一致, 因此两个物理模型是等效的. 由

$$E = \frac{kQ}{R^3}d$$

可知两绝缘球所带的电荷量大小为

$$Q = \frac{ER^3}{kd}$$

则电荷体密度为

$$\rho = \frac{3E}{4\pi kd} = \frac{3E_0}{4\pi kd}$$

可用微元法求电荷密度, 如图 3(b) 所示, 月牙体所截得中轴线的长度即月牙体的最大厚度为  $d$ , 过两球心连线  $O_1O_2$  的中点  $O$  作直线与月牙体的中轴线的夹角为  $\theta$ , 在其一边附近作一立体角元  $d\Omega$ , 对应的微小锥体在月牙体内截取一段小柱体  $\Delta V$ , 设其底面积为  $\Delta S$ , 则其体积为  $\Delta V = \Delta S \cdot h$ . 只要求出

厚度  $h$  与最大厚度  $d$  和偏角  $\theta$  的数量关系, 就可求出电荷密度.

由月牙形厚度公式可知, 在图 3(b) 中月牙体的厚度随偏角变化的关系式为

$$h = d \cos \theta$$

则立体角元在月牙体内截得小柱体的体积为

$$\Delta V = \Delta S \cdot d \cos \theta$$

因此小柱体所带的电荷量为

$$\Delta Q = \rho \Delta V$$

所以该处的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho d \cos \theta = \frac{3E_0}{4\pi k} \cos \theta$$

当两球心很近时, 即  $d \rightarrow 0$  时, 重叠区域趋近于球体, 则直线  $OA$  与月牙体的中轴线的夹角趋近于球的半径与外场强正方向的夹角, 所以金属球表面的感应电荷面密度与角度  $\theta$  的关系式

$$\sigma = \frac{3E_0}{4\pi k} \cos \theta$$

### 解法 2: 利用像电荷模型和电偶极子模型

如图 4(a) 所示, 一电偶极子的电偶极矩表示为  $p = ql$ , 点  $P$  到偶极子中心  $O$  的距离为  $r$ ,  $r$  与  $l$  的夹角为  $\theta$ . 在  $r \gg l$  时, 可求出  $P$  点的电场强度  $E$  在  $OP$  方向的分量  $E_r$ .

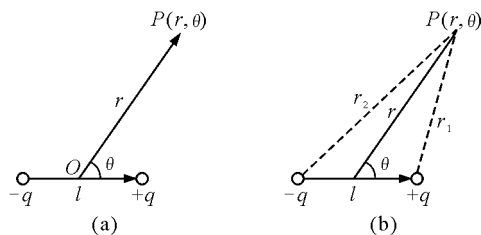


图 4

如图 4(b) 所示, 设两个点电荷到  $P$  点的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 可知  $P$  点的电势为

$$U = k \frac{q}{r_1} - k \frac{q}{r_2} = kq \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

由于  $r \gg l$ , 则

$$r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

因此

$$r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$$

$$r_2 \cdot r_1 \approx r^2$$

所以

$$U = k \frac{ql}{r^2} \cos \theta$$

可知  $P$  点的电场强度  $\mathbf{E}$  在  $OP$  方向的分量为

$$E_r = -\frac{dU}{dr} = \frac{2kql}{r^3} \cos \theta$$

如图 5 所示, 两个点电荷  $q$  和  $-q$  分别放在过球心  $O$  的直线上关于球心对称的位置, 到球心的距离为  $a$ ,  $a$  很大,  $q$  也很大, 则在球心附近区域产生的电场近似为匀强电场, 由点电荷场强公式和电场叠加可知场强大小为

$$E = E_0 \approx \frac{2kq}{a^2}$$

为了使该物理模型与例题中的物理模型等效, 那么场强应为

$$E = E_0$$

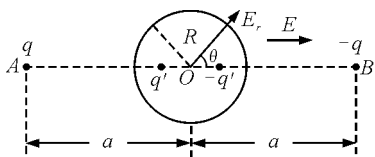


图 5

对于球外的每个点电荷而言, 电中性导体球上的感应电荷可由像电荷与球面均匀分布的电荷来代替, 而球面均匀分布的电荷等效于集中在球心的点电荷, 由于球外两个点电荷等量异号, 关于球心对称, 则分别对应的两个球心等效点电荷等量异号, 相互中和, 只剩像电荷. 由导体球的像电荷模型可知, 导体球外点电荷  $q$  在球面的感应电荷只用像电荷  $q' = -\frac{R}{a}q$  代替, 点电荷  $-q$  在球面的感应电荷只用

像电荷  $-q' = \frac{R}{a}q$  代替, 到球心的距离为  $b = \frac{R^2}{a}$ . 可见在匀强电场中的不接地导体球与接地导体球是等效的, 则两种情况的电势分布相同, 因此可用点电荷

电场中的接地导体球像电荷模型来求解在匀强电场中的不接地导体球的电荷面密度. 所以等量异号点电荷  $q$  和  $-q$  分别在球面产生的感应电荷所对应的

像电荷分别为  $-\lambda q$  和  $\lambda q$ , 到球心的距离都为  $b = \lambda R$ , 与导体球是否接地无关.

由一对等量异号点电荷  $\pm q$  组成的带电体系, 若它们之间的距离  $l$  比场点到它们中点的距离  $r$  小得多, 则把这种带电体系叫做电偶极子. 偶极子在球面上任意点  $P$  产生的法向场强为

$$E_r = \frac{2kq'l}{r^3} \cos \theta$$

式中

$$q' = \frac{R}{a}q$$

$$l = 2b = \frac{2R^2}{a}$$

$$r = R$$

则

$$E_r = \frac{4kq}{a^2} \cos \theta$$

由于处于静电平衡状态导体表面的场强为  $4\pi k\sigma$ , 则球面上  $P$  点的场强为

$$E_r + E_0 \cos \theta = 4\pi k\sigma$$

而

$$E_0 = \frac{2kq}{a^2}$$

因此

$$2E_0 \cos \theta + E_0 \cos \theta = 4\pi k\sigma$$

所以

$$\sigma = \frac{3E_0}{4\pi k} \cos \theta$$

角度  $\theta$  是球面上的某点对应的半径与匀强电场正方向的夹角, 对于一定的角度  $\theta$ , 电荷面密度相同的各点分布在球面的同一圆周上.

### 参考文献

- 1 沈晨. 专题 17——静电场: 原理与方法. 中学物理教学参考, 2005(11): 53, 56
- 2 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学(上册). 北京: 高等教育出版社, 1988. 43
- 3 王浩川, 等. 构建一般化电荷模型求解静电物理问题. 物理通报, 2014(6): 72