利用横波讨论产生半波损失的条件*

周 越
（北京林业大学理学院 北京 100083）
张国锋
（北京航空航天大学物理科学与核能工程学院 北京 100191）

（收稿日期：2014-11-17）

摘 要：基于弦线上传播的机械横波定量讨论了产生半波损失的条件.

关键词：机械波 半波损失 反射

1 引言

机械波传播到介质分界面时一般会发生反射和透射现象. 根据反射面的性质不同，反射波相对于入射波的相位可能发生 π 的跃变，称为半波损失. 对于产生半波损失的条件，限于课时和篇幅，很多教材只是直接给出结论，即当机械波从密度 ρ 和波速 u 乘积较小的介质入射到 ρu 较大的介质的分界面时，反射波存在半波损失；反之则不存在半波损失[1]. 部分教材以弦线上传播的简谐波为例，直观地展示波为何在固定端的反射存在半波损失，而在自由端的反射不存在半波损失[2]. 但是，实际的介质分界面并非是完全固定或绝对自由的，用上述实例来说明问题，学生仍普遍感到人为性较强. 如果能用一个比较简单的模型定量说明产生半波损失的条件，有利于学生加深对这个问题的理解. 在弦线上传播的简谐横波图像直观，且不涉及材料力学的背景知识，是较理想的物理系统. 本文在文献[2]中模型的基础上略加改变，给出一种简明的定量分析方法，便于学生理解和接受.

2 物理模型

考虑如图 1 所示的系统，两根不同材质的弦线通过一个轻环相连，轻环套在一个竖直的杆上，并可以沿竖杆无摩擦地滑动；两根弦线分别用 T_1 和 T_2 的力拉紧. 取轻环的平衡位置为原点，以弦线的方向为 x 轴，竖杆的方向为 y 轴建立坐标系.

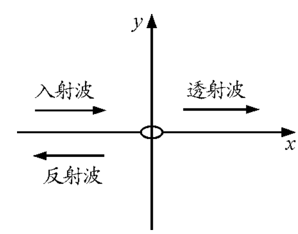

图 1 介质分界面示意图

假定有一列向 x 轴正方向传播的简谐横波，在轻环处发生反射和透射，则在轻环的左侧，每个质点的振动为入射波和反射波的叠加，可以一般地表示为

$$y_1(x,t)=A_1\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u_1}\right)+\varphi_1\right]+A_2\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u_1}\right)+\varphi_2\right] \tag{1}$$

其中右边第一项和第二项分别为入射波和反射波. 在 x 轴正半轴只有沿原方向传播的透射波，其波动方程为

$$y_2(x,t)=A_3\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u_2}\right)+\varphi_3\right] \tag{2}$$

在以上两式中 u_1 和 u_2 分别是两种材质弦线中的波速.

3 相位和振幅的关系

在介质分界面处，入射波、反射波和透射波的相

---

* 中央高校基本科研业务费专项资金资助，项目编号：TD2014-04；北京航空航天大学校级重点教改项目资助，项目编号：4325011

作者简介：周越（1982- ），男，讲师，主要从事普通物理和电子学教学与研究工作.
通讯作者：张国锋（1978- ），男，副教授，主要从事量子光学、量子信息学的研究工作.

位关系取决于 φ_1，φ_2 和 φ_3 的值，下面分析三者的关系. 根据弦线在 $x=0$ 处的连续性可得 $y_1(0,t)=y_2(0,t)$，因此有

$$A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega t+\varphi_2)=A_3\cos(\omega t+\varphi_3) \tag{3}$$

式(3)在任何时刻 t 均成立，分别令 $\omega t=0$ 和 $\frac{\pi}{2}$，可得

$$A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2=A_3\sin\varphi_3 \tag{4}$$

$$A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2=A_3\cos\varphi_3 \tag{5}$$

由于轻环的质量可忽略，要使轻环的加速度为有限值，轻环在 y 轴方向所受的合力必须趋于零. 由图 2 可知，轻环两侧的弦线在水平方向上的张力和弦线斜率的乘积相等.

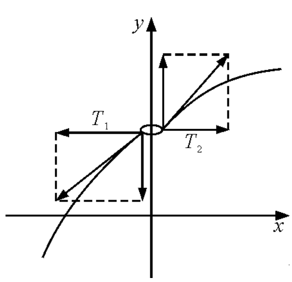

图 2　轻环的受力分析

这样得到第二个边界条件

$$T_1\left.\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=T_2\left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{6}$$

将式(1)、(2)代入可得

$$\frac{1}{u_1}T_1A_1\sin(\omega t+\varphi_1)-\frac{1}{u_1}T_1A_2\sin(\omega t+\varphi_2)=\frac{1}{u_2}T_2A_3\sin(\omega t+\varphi_3) \tag{7}$$

仍然令 $\omega t=0$ 和 $\frac{\pi}{2}$，并且利用弦线的张力和波速的关系 $T=\rho u^2$，可得

$$\rho_1u_1A_1\sin\varphi_1-\rho_1u_1A_2\sin\varphi_2=\rho_2u_2A_3\sin\varphi_3 \tag{8}$$

$$\rho_1u_1A_1\cos\varphi_1-\rho_1u_1A_2\cos\varphi_2=\rho_2u_2A_3\cos\varphi_3 \tag{9}$$

由式(4)、(8)可得

$$A_3\sin\varphi_3=\frac{2\rho_1u_1}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}A_1\sin\varphi_1 \tag{10}$$

$$A_2\sin\varphi_2=\frac{\rho_1u_1-\rho_2u_2}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}A_1\sin\varphi_1 \tag{11}$$

由式(5)、(9)可得

$$A_3\cos\varphi_3=\frac{2\rho_1u_1}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}A_1\cos\varphi_1 \tag{12}$$

$$A_2\cos\varphi_2=\frac{\rho_1u_1-\rho_2u_2}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}A_1\cos\varphi_1 \tag{13}$$

利用以上 4 个关系可以得到

$$\tan\varphi_1=\tan\varphi_2=\tan\varphi_3$$

即入射波、反射波和透射波在分界面处的相位或者相同，或者相差 π. 由式(11)可知，当 $\rho_1u_1>\rho_2u_2$ 时，$\sin\varphi_1$ 和 $\sin\varphi_2$ 同号，故入射波与反射波同相；当 $\rho_1u_1<\rho_2u_2$ 时，$\sin\varphi_1$ 和 $\sin\varphi_2$ 异号，因此 $\varphi_2=\varphi_1+\pi$，反射波相对于入射波的相位发生了 π 的跃变，即所谓半波损失. 而无论两种介质的 ρu 是何种关系，$\sin\varphi_3$ 和 $\sin\varphi_1$ 均同号，因此在任何情况下透射波都不存在半波损失.

式(10)和式(11)同时还给出了反射波和透射波的幅度关系. 一般而言，弦线上既存在反射波又存在透射波. 当 $\rho_1u_1=\rho_2u_2$ 时，$A_2=0$，介质分界面处无反射；当 ρ_2 趋于零或者右侧弦线不存在时，轻环对左侧弦线的作用力无 y 轴方向的分量，对应于自由端反射的情况，这时 $A_2=A_1$，$A_3=0$，发生全反射且反射面为驻波的波腹；当 ρ_2 趋于 ∞ 时，右侧弦线的位移趋于零，相当于轻环被固定在平衡位置上，对应于固定端反射的情况，这时 $A_2=-A_1$，$A_3=0$，发生全反射且反射面为驻波的波节.

参 考 文 献

1　张文杰，曹阳. 大学物理教程. 北京：中国农业大学出版社，2009. 65

2　哈里德，瑞斯尼克，沃克. 物理学基础. 北京：机械工业出版社，2015. 416

Discussion on the Condition of Half - wave Loss Using Transverse Wave

Abstract: The condition of half - wave loss is discussed based on the transverse mechanical wave on a string.

Key words: mechanical wave; half - wave loss; reflection