正多边形顶角和各边带电在中心处场强的计算

王　鹏　　杨培军

（界首市界首中学　安徽 阜阳　236500）

（收稿日期：2015－01－16）

摘　要：在正多边形每个顶角上各放置一个等量同种点电荷，则中心处合场强为零，对于这一结论本文给出了3种证明方法；并进而分析了正多边形每个边均匀带电等情况.

关键词：正五边形　正多边形　合场强　点电荷　对称

正多边形对称性强，匀称美观，是一种很常见的图形，如果让正多边形带上电荷，那么其中心处的电场强度是多少呢？本文分析了几种简单情况.

1　正多边形各顶角均放置一等量同种点电荷

1.1　问题的提出

【例 1】在不少资料中，都有这样一道题：如图1(a)所示，A,B,C,D,E 是半径为 r 的圆周上等间距的5个点，在这些点上各固定一个点电荷，除 A 点处的电荷量为 $-q$ 外，其余各点处的电荷量均为 $+q$，则圆心 O 处

A. 场强大小为$\dfrac{kq}{r^2}$，方向沿 OA 方向

B. 场强大小为$\dfrac{kq}{r^2}$，方向沿 AO 方向

C. 场强大小为$\dfrac{2kq}{r^2}$，方向沿 OA 方向

D. 场强大小为$\dfrac{2kq}{r^2}$，方向沿 AO 方向

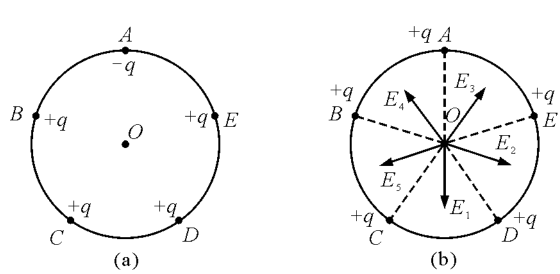

图 1

此题的关键在于证明一个结论：在正五边形每个顶角上各放置一个等量同种点电荷[如图1(b)]，则正五边形中心处合场强为零.这个结论可以推广到正 n 边形的情况.本文给出了3种证明方法.

1.2　结论的证明

1.2.1　对称法

先证明边数为偶数的情况.此时正多边形具有中心对称性.以正六边形为例，如图2所示，很显然，各点电荷在中心 O 点产生的场强两两抵消，中心 O 点的合场强为零.

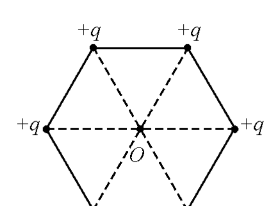

图 2

再考虑边数为奇数的情况.以正五边形为例，如图3(a)所示，设中心 O 点的合场强为 E_1，然后以过中心 O 点且垂直于正五边形的直线为轴，将正五边形顺时针旋转角度$\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\pi}{5}=36°\right.$，对正 n 边形，$\left.\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{\pi}{2}\right)$，此时中心 O 点的场强为 E_2，然后与原正五边形叠加，得到正十边形[图3(b)]，根据边数为偶数时的结论，中心 O 点的

场强为零，又因为 E_1 与 E_2 等大，夹角为一锐角 $\frac{\alpha}{2}$，因此只能是 $E_1 = E_2 = 0$.

综上所述，无论正多边形的边数为偶数还是奇数，其中心处合场强均为零.

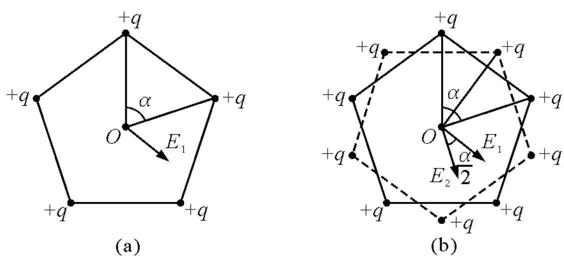

图 3

1.2.2　图像法

把表示场强的有向线段平移，使之成为一个首尾连接的正多边形.

以正五边形为例，在图 4 中，任选一个场强例如 E_3 保持不动，平移 E_2，在平移时要注意在圆心 O 处 E_2 和 E_3 之间的夹角为 72°（图 4 中 α），而正五边形每一顶角为 108°，恰好互补，因此将 E_2 平移，使其起点为 E_3 的终点，则 E_3 的终点处角度恰好为 108°，这说明 E_3 的终点为正五边形的某一顶点. 然后按顺时针顺序依次平移 E_1，E_5，E_4，即可得到一个首尾连接的正五边形，由此即可说明 5 个场强的矢量和为零.

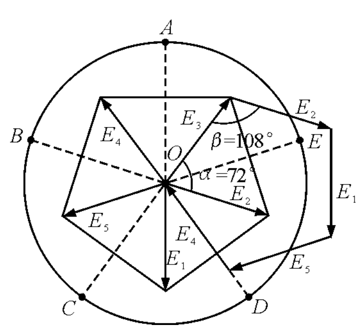

图 4

此方法很容易推广到正 n 边形的情况. 如图 5 所示（图 5 中为正十一边形），在圆心处相邻两个场强之间的夹角设为 α，$\alpha = \frac{360°}{n}$；正 n 边形每个顶角设为 β，$n\beta + 360° = n\,180°$，$\beta = 180° - \frac{360°}{n} = 180° - \alpha$. 保持场强 E_1 不动，平移 E_2，使其起点为 E_1 的终点，则 E_1 的终点处角度恰好为 β，则 E_1 的终点 A_1 为正 n 边形的某一顶点，然后按顺时针顺序依次平移 E_3，E_4，E_5⋯，即可得到一个首尾连接的正 n 边形，由此即可说明 n 个场强的矢量和为零. 当 n 为无穷大时，正 n 边形即为均匀的带电圆环，圆心处合场强为零，这是大家都熟悉的结论.

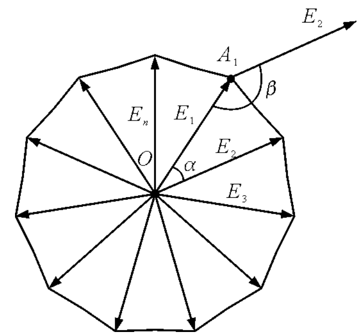

图 5

1.2.3　平面向量法

我们直接证明正 n 边形的情况（图 6）. 以正 n 边形中心为坐标原点，以 E_n 所在直线为 x 轴，垂线为 y 轴. 则 E_1 与 x 轴夹角 $\alpha_1 = \alpha = \frac{2\pi}{n}$，$E_2$ 与 x 轴夹角 $\alpha_2 = 2\alpha$，E_3 与 x 轴夹角 $\alpha_3 = 3\alpha$，……，E_n 与 x 轴夹角 $\alpha_n = n\alpha$. 令场强大小为 E，接下来我们写出每个场强在 x，y 轴上分向量合成的形式，在 x，y 轴上的单位矢量设为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$.

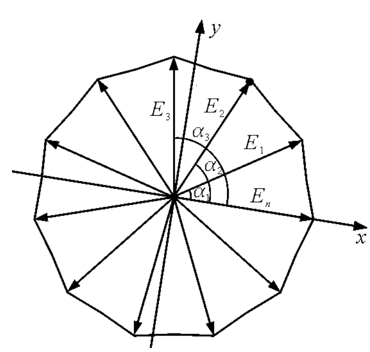

图 6

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{i}E\cos\alpha + \boldsymbol{j}E\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{i}E\cos 2\alpha + \boldsymbol{j}E\sin 2\alpha$$

$$\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{i}E\cos 3\alpha + \boldsymbol{j}E\sin 3\alpha$$

……

$$\boldsymbol{E}_n = iE\cos n\alpha + \boldsymbol{j}E\sin n\alpha$$

$$\boldsymbol{E}_{合} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n =$$

$$\boldsymbol{i}E(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha) +$$

$\boldsymbol{j}E(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha)$

下面我们来证明两个坐标均为零.这是很著名的三角函数题,利用积化和差等三角函数公式即可计算出结果,计算细节略去.

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha)=$$

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{1}$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=$$

$$(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha)\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{2}$$

将 $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ 代入上述(1)、(2)式可得结果均为零,所以

$$\boldsymbol{E}_{合}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\cdots+\boldsymbol{E}_n=(0,0)$$

至此我们用了 3 种方法证明了结论,有了这个结论,接下来很容易就解决例 1 这道题了,解题过程从略.

2　正多边形每个边都均匀带电

正多边形每个边都均匀带同种电荷,电荷的线密度为 λ,且电荷固定,不能自由移动,则正多边形中心处合场强仍为零.我们用两种方法来证明.

2.1　将问题转化为正多边形每个顶角上带等量同种点电荷的情况

先来考虑某一个边在中心处产生的场强.如图 7 所示,由对称性很容易看出 AB 边在中心 O 点产生的场强沿 AB 边中垂线方向(具体方向要看电荷的种类),很显然在 AB 边中点处放置一适当同种点电荷 q,可以在中心 O 点产生相同的场强,这样问题就转化成了图 7(b) 的情况(正多边形每个边不带电,每边中点均放置等量同种点电荷 q),根据第一部分的结果,正多边形中心处合场强为零.至于电荷量 q 是多少,我们会在第二种方法中计算.

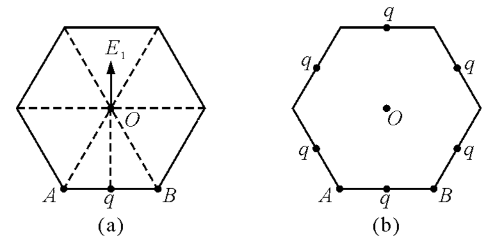

图 7

2.2　将问题转化为均匀带电圆环的情况

过中心 O 点作正多边形的内切圆[图 8(a)],半径为 R,让该圆均匀带电,电荷种类和线密度与正多边形均相同.设该内切圆与边 AB 的切点为 C,如图 8(b) 所示,我们来证明边 AB 在中心 O 点产生的场强等于均匀带电圆弧 A_1B_1 在中心 O 点产生的场强[1].

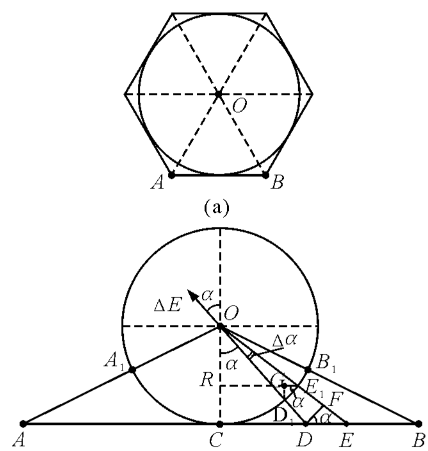

图 8

在边 AB 上截取很短的一段 DE,可视为点电荷,然后在 OE 上截取 $OF=OD$,DE 部分在中心 O 点产生的场强为

$$\Delta E=k\frac{\Delta l_{DE}\lambda}{r_{OD}{}^2}=k\frac{\Delta l_{DE}\lambda}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2}=$$

$$k\frac{\lambda\Delta l_{DE}\cos^2\alpha}{R^2}=k\frac{\lambda\Delta l_{DF}\cos\alpha}{R^2}=$$

$$k\frac{\lambda r_{OD}\cdot\Delta\alpha\cdot\cos\alpha}{R^2}=k\frac{\lambda R\Delta\alpha}{R^2}=k\frac{\lambda\,\overline{D_1E_1}}{R^2}$$

由此可见,线段 DE 与圆弧 D_1E_1,弦 D_1E_1 在中心 O 点产生的场强相同,所以边 AB 在中心 O 点产生的场强与圆弧 A_1B_1 在中心 O 点产生的场强相同,整个正多边形在中心 O 点产生的场强与整个内切圆在中心 O 点产生的场强相同,等于零.

对“双电荷”电场中带电粒子做匀速圆周运动条件的研究

姜付锦　朱小娟
（武汉市黄陂区第一中学　湖北 武汉　430030）
（收稿日期：2015－03－03）

摘　要：通过对“双电荷”电场强度的研究，证明了在这种电场中带电粒子若仅受电场力作用且速度满足特定的要求时，则有可能做匀速圆周运动.

关键词：“双电荷”电场　电场强度　匀速圆周运动

本文中的“双电荷”电场是指等量同种点电荷电场或等量异种点电荷电场，下面分别分析在这两种情形下电场中的带电粒子受力情况及匀速圆周运动条件，并推出圆周运动的速度关系式，从而证明带电粒子仅受电场力且速度满足特定的要求时，带电粒子有可能做匀速圆周运动.

1　等量异种点电荷电场中带电粒子做匀速圆周运动

如图1所示，在带等量异种点电荷量 Q 和 $-Q$ 形成的电场中，若在 $P(d,h)$ 点放一个带正电的质点，则受到库仑引力和斥力. 显然 $F_{引} > F_{斥}$，$\alpha > \theta$. 若满足 $F_{引}\sin\theta = F_{斥}\sin\alpha$，$F_{引}\cos\theta > F_{斥}\cos\alpha$，则对于以 M 点为圆心，以 PM 为半径的圆上每一个点，其场强大小相等，方向指向圆心. 那么当带正电的粒子以一个恰当的速度垂直 PM 进入电场时，由牛顿第二定律和向心力公式，有

$$F_{引}\cos\theta - F_{斥}\cos\alpha = m\frac{v^2}{h}$$

这表明带电粒子可做匀速圆周运动. 再根据电场分布的对称性，在“双电荷”电场的左边对称位置上，同样的方法，可让一个带负电的粒子做匀速圆周运动.

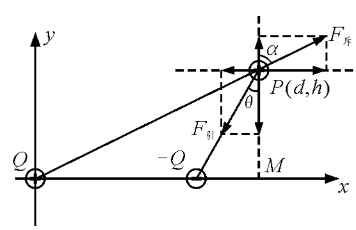

图1　等量异种点电荷电场中的匀速圆周运动

接下来我们继续计算. 圆弧 D_1E_1 在中心 O 点产生的场强可以分解，由于对称性，沿水平方向的分量会互相抵消，我们来计算竖直方向的分量.

$$\Delta E_y = k\frac{\lambda\,\overline{D_1E_1}}{R^2}\cos\alpha = k\frac{\lambda\,\overline{GE_1}}{R^2}$$

所以圆弧 A_1B_1 在中心 O 点产生的场强等于弦 A_1B_1（图12中没有画出）在中心 O 点产生的场强. 即

$$E_1 = k\frac{\lambda\,\overline{A_1B_1}}{R^2} = k\frac{q}{R^2}$$

其中 $q = \lambda\,\overline{A_1B_1}$，也就是说，如果在 AB 中点处放置一带电荷量为 q 的点电荷，其在中心 O 点产生的场强与 AB 边在中心 O 点产生的场强一样，此即第一种解法中问题的答案.

对于其他情况，例如正多边形每个顶点带不等量点电荷，也可得出相应结果. 就不一一计算了.

3　结语

从以上讨论过程可以看出对称的重要性，对称不仅帮助我们认识现象的本质，而且可以使计算大为简化，使复杂的问题得以快速解决. 对对称性的认识我们不能停留在感性认识上，更要注意认识其内部的对称性，而且还要能够充分发挥想象力，善于构造对称关系，以简化解题步骤[3].

参 考 文 献

1　程稼夫. 中学奥林匹克竞赛物理教程·电磁学篇. 合肥：中国科学技术大学出版社，2004.11
2　江志云，黄丽贞. 对称性在高中物理教学中的初步研究.