定义电磁场矢量的思想实验*

浦天舒

(东华大学理学院　上海　201620)

(收稿日期：2015 - 04 - 01)

摘　要：通过思想实验定义电通量密度和磁场强度两个电磁场矢量，认识其物理意义．由高斯定律和安培定律并借助实验上的库仑定律和毕奥-萨伐尔定律，找出电通量密度与电场强度以及磁场强度与磁感应强度之间所必须满足的关系．

关键词：思想实验　电磁场矢量　极化强度矢量　磁化强度矢量　高斯定律　安培定律

1　引言

讲到电磁场，首先碰到的问题是场量的定义．在大多数大学物理教科书中通常只定义了电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度(磁通量密度)$\boldsymbol{B}$，而把电通量密度(电位移)$\boldsymbol{D}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 作为辅助量引入．这样虽然在逻辑上没有问题，但 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 却没有明确的物理意义，而且容易给人造成 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 重要而 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$ 似乎不太重要的印象．但事实上我们知道电磁场是由 4 个矢量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$ 构成的，它们应该是同等重要的(当然在不同的研究领域它们的重要性会有所不同)．这一点从麦克斯韦方程组也可以看出．所以最好对这 4 个场量各自单独定义．这样既可赋予 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$ 以一定的物理意义，而且借助实验定律也可以找出它们跟 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 的关系．

2　通过思想实验定义 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$

4 个电磁场矢量都可以通过所谓“思想实验”进行定义[1]．例如电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可分别通过作用在静止和运动的试验电荷上的力的思想实验加以定义(借助法拉第定律，也可以从磁通量密度的概念通过思想实验来定义 $\boldsymbol{B}$[1])．同样，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 也可以通过思想实验定义．

2.1　定义 $\boldsymbol{D}$ 的思想实验

$\boldsymbol{D}$ 一般称为电通量密度，但电通量本来是从电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 来定义的．即通过一个面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电通量 $\mathrm{d}\Phi_e$ 定义为

$$\mathrm{d}\Phi_e = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1}$$

因此我们也可以从电通量密度的概念来定义 $\boldsymbol{E}$．但现在我们从矢量 $\boldsymbol{D}$ 来定义电通量

$$\mathrm{d}\Psi_e = \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2}$$

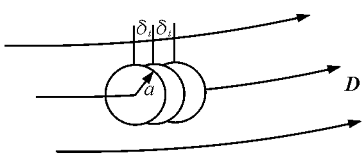
可以通过如下思想实验来定义 $\boldsymbol{D}$[1]：考虑将一对圆形金属电极板叠在一起放入由 $\boldsymbol{D}$ 形成的场中[图 1(a)]．假定极板的面积($\Delta S = \pi a^2$)很小并且极板的厚度 δt 远小于极板的直径，即 $\delta t \ll 2a$．暂且假设，$\boldsymbol{D}$ 也是由电荷产生并且对电荷的作用跟 $\boldsymbol{E}$ 一样．则由于矢量场 $\boldsymbol{D}$ 的存在，极板中的电荷将发生位移并在极板上形成表面电荷(积累负电荷的称为正极板而积累正电荷的称为负极板)．电荷位移后重排的结果使得在极板之间原来的场和由于表面电荷所产生的场相加的总场为零．这样就可以用极板间由表面电荷所产生的场来定义原来的场．为了做到这一点，现在将两块极板分开[图 1(b)]，发生了位移的电荷便留在了正负极板上．然后将极板从场中移出并接到一只电荷计(例如一只冲击电流计)上[图 1(c)]．于是先前留在极板上的电荷将通过电荷计，给出一个总电荷读数[即冲击电流 $I(t)$ 之时间积分

* 上海高校实验技术队伍建设专项资金项目：加强创新能力培养的基础物理实验教学改革研究．

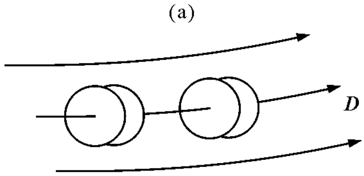
作者简介：浦天舒(1960 -　)，男，副教授，主要从事物理光学、大学物理实验、微波技术的教学和研究工作．

$\int_0^t I(t)\mathrm{d}t$]. 将此实验进行多次，每一次电极在场中不同取向. 在某个特定的取向，位移电荷最多，因此电荷计的读数，会有一个最大值. 定义电位移矢量的大小等于产生的最大位移电荷量与极板的面积之比，方向为当极板取向使位移电荷量最大时正极板的法线方向. 在数学上，如果用 $\boldsymbol{D}$ 代表电位移矢量，$\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 代表产生最大位移电荷量 ΔQ_0 时正极板到负极板的单位法线矢量，那么

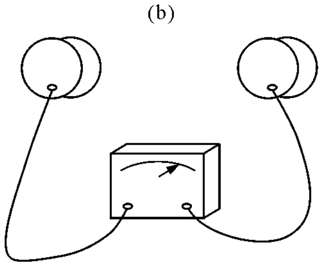
$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a}_\mathrm{n}\left[\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q_0}{\Delta S}\right]_{\max} \tag{3}$$



(a)



(b)



(c)

图 1　矢量场 $\boldsymbol{D}$ 中的一对薄圆形导电金属电极

$\boldsymbol{D}$ 叫做电通量密度是因为它给出了通过单位面积的场的力线的数目(称为通量)，而符号“D”则表示它是由电荷的位移(Displacement)产生的场，这一名称是与上述思想实验中导电极板上的位移电荷相联系的.

从 $\boldsymbol{D}$ 的定义可以引出高斯定律. 因为对一个闭合面来说，$\boldsymbol{D}$ 在整个闭合面的外法线分量上的积分便是 ΔQ_0，所以 ΔQ_0 也就是抵消原来场的位移电荷，所谓高斯定律便是

$$\Psi_\mathrm{e} = \oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Delta Q_0 \tag{4}$$

即漏出一个闭合面的电通量等于由这个闭合面所包围的总电荷.

现在我们假设 ΔQ_0 为一点电荷，则由于球对称性，在距离 ΔQ_0 为 R 的球面上任一点处有 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a}_R D(R)$，由高斯定律可以得到

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a}_R D(R) = \frac{\Delta Q_0}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{5}$$

如果我们在距离 ΔQ_0 为 R 的球面上任一点放置一静止测试电荷 Q_t，则如果 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，那么这个测试电荷所受的力为

$$\boldsymbol{F} = Q_t\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_t\Delta Q_0}{R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{6}$$

这正是库仑定律. 即如果我们假定高斯定律中的 ΔQ_0 是自由电荷，那么 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 便是自由空间中 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 必须满足的关系.

当存在媒质时，媒质分子会因极化而产生极化电荷，与自由电荷不同的是，极化电荷是正负电荷错开形成的分子偶极矩，所以若因“位移”而穿出闭合面的极化电荷是 $-\Delta Q'$ 的话，则在闭合面内便有剩余电荷 $\Delta Q'$. 对于极化电荷，我们定义极化矢量 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_\mathrm{n}\left[\lim_{\Delta S\to 0}\frac{-\Delta Q'}{\Delta S}\right]_{\max} \tag{7}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 在整个闭合面的外法线分量上的积分

$$\oiint \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\Delta Q' \tag{8}$$

可以证明，此一定义与一般书上以单位体积内微观分子电偶极距的矢量和定义的 $\boldsymbol{P}$ 是一致的[2]. 这样等于是把 $\boldsymbol{D}$ 看成是自由电荷产生的场(不论是在媒质中还是在自由空间)，把 $\boldsymbol{P}$ 看成是极化电荷产生的场，只是极化电荷产生的场并不能像自由电荷产生的场那样抵消原来的场(即自由电荷的场)，所以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是不同的场矢量. 但不论是在媒质中还是在自由空间，$\boldsymbol{D}$ 都由式(3)定义.

可令媒质中的总电荷 $Q=\Delta Q_0+\Delta Q'$，这里 ΔQ_0 代表自由电荷. 于是由式(4)和式(8)有

$$\oiint(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Delta Q_0 + \Delta Q' = Q \tag{9}$$

即总电荷产生的场是 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}$. 上式也可看成是矢量 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}$ 的高斯定律. 如果 Q 为一点电荷，则同样有

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P} = \frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{10}$$

若

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{11}$$

则位于 R 处的测试电荷 Q_t 所受的力

$$\boldsymbol{F}=Q_t\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_tQ}{R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{12}$$

满足库仑定律. 所以式(11) 就是媒质中 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 必须满足的关系. 因此我们可以把式(11) 看成是由高斯定律借助库仑定律得到的. 也可以把库仑定律看成是由高斯定律借助式(11) 得到的.

从上述思想实验我们看到,$\boldsymbol{D}$ 可以看成是自由电荷产生的场,而真正的电场 $\boldsymbol{E}$ 则包括了所有电荷的贡献,但 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都对所有电荷(自由电荷与极化电荷) 有作用.

2.2　定义 $\boldsymbol{H}$ 的思想实验

$\boldsymbol{H}$ 可以通过如下思想实验定义:取一用导线密绕成一个圆柱形状的螺线管线圈[图 2(a)]. 螺线管的长度 ΔL 很短,但与它截面的直径 $2a$ 相比仍很长,即 $\Delta L\gg 2a$,其上绕有 n 圈导线. 连接一电流源至线圈导线,便会在导线中产生电流 I. 螺线管的单位长度上的电流因而是 $\dfrac{nI}{\Delta L}$. 可把此螺线管理想化地看成是一个围绕着一薄层表面电流 $J_{S0}=\dfrac{nI}{\Delta L}$ 的短圆柱体,如图 2(b) 所示.

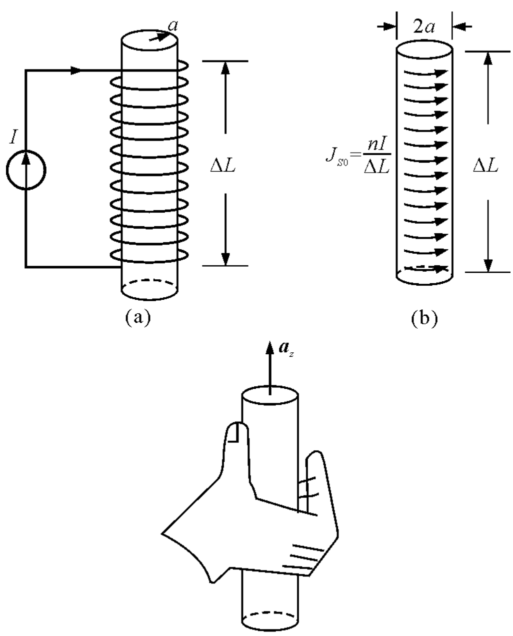


图 2　定义磁场强度的密绕通电螺线管线圈

现在,把一棒形磁体放入螺线管并测量这一磁体上受到的力矩. 结果发现力矩的强度在螺线管内是均匀的(只要放置的磁体远离两端) 并且正比于电流 I,而此力矩的方向是使磁棒沿螺线管的轴线. 我们定义螺线管内的磁场强度的大小等于表面电流 J_{S0},方向为当右手四指朝电流方向握住螺线管时大拇指所指的螺线管的轴向,其单位矢量为 $\boldsymbol{a}_z$[图 2(c)],即

$$\boldsymbol{H}=J_{S0}\boldsymbol{a}_z \tag{13}$$

为了测量空间一点 P 的磁场强度,我们可以把这个通电小螺线管放在这一点,然后调节电流的大小以及螺线管的取向,直到使螺线管内小磁棒上的力矩为零,那么螺线管内部的磁场一定为零. 由于现在的总场是我们要测量的原始场和螺线管电流产生的场之和,所以原始场的大小等于螺线管电流产生的场但方向相反. 这一测量也可以在材料媒质中进行,只要在我们的思想实验中想象这个小螺线管是被固定在材料媒质中的一个很细的管道中.

如果我们把 $\boldsymbol{H}$ 定义为仅由自由电荷的流动形成的电流 I_0(来自导电媒质或自由空间中移动的电子、质子、或离子的流动) 产生的场,那么在磁化了的媒质中,可以设想一个由表面磁化电流 nI' 形成的螺线管,定义一个磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\frac{nI'}{\Delta L}\boldsymbol{a}_z \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{a}_z$ 的方向也是按右手规则确定. 注意 $\boldsymbol{M}$ 并不能使磁场 $\boldsymbol{H}$ 中的螺线管内小磁棒上的力矩为零. 因为单匝线圈的磁化电流 I' 产生的磁矩为 $\boldsymbol{m}=I'\Delta S\boldsymbol{a}_z$($\Delta S=\pi a^2$),所以式(14) 也表示体积元 $\Delta L\Delta S$ 内的磁矩之和,即 $\boldsymbol{M}=\dfrac{n\boldsymbol{m}}{\Delta L\Delta S}=\dfrac{nI'}{\Delta L}\boldsymbol{a}_z$,故有[3]

$$\oint\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=nI' \tag{15}$$

而对于 H 显然应该相应有

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=nI_0 \tag{16}$$

式中 I_0 为自由电荷的流动产生的电流. 这就是安培定律.

因为由实验上的毕奥-萨伐尔定律可以导出单位长度上螺线管内的磁感应强度为[2]

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \frac{nI'}{\Delta L}\boldsymbol{a}_z \tag{17}$$

其方向 $\boldsymbol{a}_z$ 也由右手规则确定，但这里的电流是包括了磁化电流的总电流即 $I = I_0 + I'$. 因此磁感应强度与电流的积分关系可写成

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 n(I_0 + I') \tag{18}$$

由式(15)、(16) 以及(18)，有

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{19}$$

在一般电磁学书上安培定律是由毕奥-萨伐尔定律导出的，而在这里我们通过思想实验定义了 $\boldsymbol{H}$，相当于先假定安培定律，但为了使由毕奥-萨伐尔定律得到的结果式(17) 成立，$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 必须满足式(19). 当然我们也可以把毕奥-萨伐尔定律看做是由安培定律借助式(19) 而得到的.

3 结论

我们在非时变的静电和静磁情况下通过思想实验定义了电磁场矢量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 在第一个思想实验中，电荷位移使电极之间的场为零实际上是假定高斯定律成立；在第二个思想实验中，使放入场中的螺线管中的小磁棒受到的力矩为零实际上是假定安培定律成立. 而式(11)、(19) 必须在实验定律即库仑定律和毕奥-萨伐尔定律成立的条件下得到，或者说借助式(11) 和(19) 可由高斯定律和安培定律导出库仑定律和毕奥-萨伐尔定律. 在一般电磁学书上通常是由库仑定律和毕奥-萨伐尔定律这两个实验定律导出高斯定律和安培定律的，但我们知道库仑定律原先是在静电场中得到的实验定律，而高斯定律则被麦克斯韦推广到了时变的情况(这样等于也把库仑定律推广到了动态情形)；同样，在麦克斯韦方程组中安培定律也是一个基本定律(不过在把它推广到时变情况时加上了位移电流项). 所以高斯定律和安培定律(时变时应加上位移电流项) 是更普遍的定律，由高斯定律和安培定律导出库仑定律和毕奥-萨伐尔定律在逻辑上更合理.

参 考 文 献

1 Paul R. Karmel, Gabriel D. Colef, Raymond L. Camisa. Introduction to Electromagnetic and Microwave Engineering. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. 57 ~ 64

2 赵凯华，陈熙谋. 电磁学(上册). 北京：人民教育出版社，1978. 141 ~ 143，290

3 赵凯华，陈熙谋. 电磁学(下册). 北京：人民教育出版社，1978. 85 ~ 88

Thought Experiments on Defining Electromagnetic Field Vectors

Pu Tianshu

(College of Sciecce of Donghua University, Shanghai 201620)

Abstract: Electric flux density and magnetic field intensity are defined in terms of two thought experiments. Physical meanings of the two vectors can be realized. The relationships between electric flux density and electric field intensity, magnetic field intensity and magnetic induction intensity can be found from Gauss's law and Ampère law in virtue of Coulomb's law and Biot－Savart law on experimentation.

Key words: thought experiment; electromagnetic field vectors; polarization intensity vector; magnetization intensity vector; Gauss's law; Ampère law