康普顿效应及其弹性碰撞恢复系数的推证

姜付锦

（武汉市黄陂一中　湖北 武汉　430300）

（收稿日期:2015－05－05）

摘　要:该文通过对宏观低速的二维弹性碰撞的分析,发现其恢复系数为 1;再用恢复系数对康普顿效应进行了研究,证明了(微观高速粒子弹性碰撞的典型事例)其恢复系数也为 1.

关键词:康普顿效应　狭义相对论　弹性碰撞　恢复系数

1　康普顿效应[1]

1921～1923 年,美国物理学家康普顿在研究石墨对 X 射线散射时,发现散射的 X 射线中,除了与入射波长 λ_0 相同的成分外,还有波长大于 λ_0 的成分,这个现象称为康普顿效应. 康普顿用爱因斯坦 1905 年提出的光量子概念,并引入狭义相对论. 成功地解释了这种效应. 他的基本思想是:X 射线的光子不仅具有能量,也像其他粒子那样具有动量,X 射线的光子与晶体中电子碰撞时要遵守能量守恒定律和动量守恒定律,而且还要考虑狭义相对论效应即电子质量的相对性和质能方程,求解这些方程得出的散射光波长的变化值 $\Delta\lambda$ 与实验符合得很好. 康普顿效应的发现,对 20 世纪初物理学的革命(量子论与相对论的建立)起到重大的推动作用. 康普顿效应具体计算如下:

如图 1 所示,入射 X 射线光子的动量 $p=\dfrac{h}{\lambda_0}$,能量 $E=\dfrac{hc}{\lambda_0}$,散射后 X 射线光子的动量 $p'=\dfrac{h}{\lambda}$,能量 $E'=\dfrac{hc}{\lambda}$. 电子的静止质量为 m_e,散射后电子的速度为 v,质量为

$$m=\frac{m_e}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

动量为 $p=mv$,动能为 $E=(m-m_e)c^2$,光子与电子发生弹性碰撞,则

$$\frac{h}{\lambda_0}=\frac{h}{\lambda}\cos\theta_1+mv\cos\theta_2 \quad (1)$$

$$0=\frac{h}{\lambda}\sin\theta_1-mv\sin\theta_2 \quad (2)$$

$$\frac{hc}{\lambda_0}=\frac{hc}{\lambda}+(m-m_e)c^2 \quad (3)$$

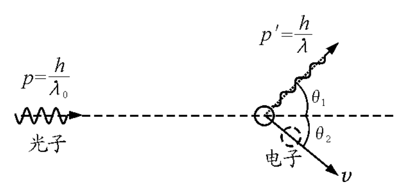

图 1　康普顿效应

联立式(1)、(2)、(3) 可求得

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{2h}{m_e c}\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

X 散射光波长的变化值 $\Delta\lambda$ 与实验符合得很好,由此可见爱因斯坦的光量子理论和狭义相对论的正确性.

2　恢复系数[2]

牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中首次提出恢复系数,恢复系数 e 由两球材料的弹性决定,其表达式为

$$e=\left|\frac{v_2-v_1}{v_{20}-v_{10}}\right|$$

式中 v_{10},v_{20} 是两个物体碰撞前的速度,v_1,v_2 是碰撞后的速度. 若 $e=1$ 则是弹性碰撞;若 $e<1$ 则非弹

性碰撞，这个公式不仅适用于一维碰撞也适用于二维碰撞[3,4]．如图2所示，在光滑的水平面上，质量为 m_1 的小球以速度 v_{10} 与质量为 m_2 速度为 v_{20} 小球发生二维弹性碰撞，碰撞后两球的速度分别为 v_1，v_2，速度方向分别与水平方向成 θ_1，θ_2，则

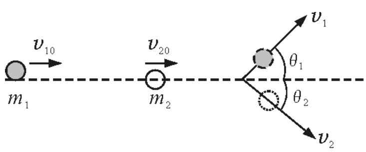

图2　两个小球的二维碰撞

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \tag{4}$$

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2 \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{6}$$

由余弦定理可知

$$|v_2 - v_1| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \tag{7}$$

将式(4)平方与式(5)平方相加得

$$(m_1 v_{10} + m_2 v_{20})^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{8}$$

将式(8)代入式(7)得

$$|v_2 - v_1| = \left\{ v_1^2 + v_2^2 - \frac{1}{m_1 m_2}\left[(m_1 v_{10} + m_2 v_{20})^2 - (m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2)\right] \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{m_1 m_2}\left[(m_1 + m_2) m_1 v_1^2 + (m_1 + m_2) m_2 v_2^2 - (m_1 v_{10} + m_2 v_{20})^2\right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

将式(6)两边同乘以 $2(m_1 + m_2)$ 得

$$(m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2)(m_1 + m_2) = (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2) \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)得

$$|v_2 - v_1| = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (v_{10}^2 + v_{20}^2 - 2 v_{10} v_{20})}{m_1 m_2}} = |v_{20} - v_{10}|$$

故宏观低速二维弹性碰撞中的恢复系数

$$e = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_{20} - v_{10}} \right| = 1$$

3　狭义相对论中相对速度[5]

由洛伦兹变换公式可以推导出相对论中的速度变换公式，设

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} \tag{11}$$

为物体相对于坐标系 $\sum$ 的速度．设惯性系 $\sum'$ 相对于 $\sum$ 系沿 x 轴方向以速度 v 运动，在 $\sum'$ 系中物体速度分别为

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \qquad u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \qquad u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \tag{12}$$

由相对论时空坐标变换公式

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \qquad z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{13}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

将式(14)代入式(12)得

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} = \dfrac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{\Delta y'}{\Delta t'} = \dfrac{u_y \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u'_z = \dfrac{\Delta z'}{\Delta t'} = \dfrac{u_z \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \end{cases} \tag{15}$$

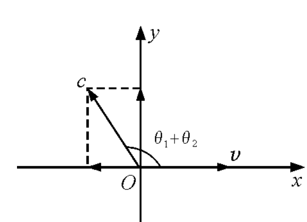

图3　光子相对电子的速度

如图 3 所示，X 光子散射后与电子的运动方向夹角为 $\theta_1+\theta_2$，以电子的速度 v 方向为 x 轴，与之垂直的方向为 y 轴建立平面直角坐标系 Oxy，则光子在 x 轴和 y 轴方向上的分速度分别为

$$\begin{cases} u_x = c\cos(\theta_1+\theta_2) \\ u_y = c\sin(\theta_1+\theta_2) \\ u_z = 0 \end{cases} \tag{16}$$

将式(16)代入式(15)得 X 光子相对于电子的 3 个分速度分别为

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1-\dfrac{u_x v}{c^2}} = \dfrac{c\cos(\theta_1+\theta_2)-v}{1-\dfrac{cv\cos(\theta_1+\theta_2)}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} = \dfrac{c\sin(\theta_1+\theta_2)\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dfrac{cv\cos(\theta_1+\theta_2)}{c^2}} \\ u'_z = \dfrac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

则光子相对电子的速度

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2} = \left\{\left[\frac{c^2\cos(\theta_1+\theta_2)-cv}{c-v\cos(\theta_1+\theta_2)}\right]^2 + \left[\frac{c\sin(\theta_1+\theta_2)\sqrt{c^2-v^2}}{c-v\cos(\theta_1+\theta_2)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\{\frac{1}{[c-v\cos(\theta_1+\theta_2)]^2}c^2\left[c^2 + v^2\cos^2(\theta_1+\theta_2) - 2cv\cos(\theta_1+\theta_2)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = c \tag{18}$$

散射后光子相对于电子的速度为 c，在康普顿效应中光子与电子碰撞的恢复系数也为 1.

4 结语

通过对宏观低速和微观高速粒子弹性碰撞的分析和恢复系数的定义式可以发现它们恢复系数均为 1，它和动量守恒定律一样具有普适性.

参 考 文 献

1 周世勋. 量子力学(第二版). 北京：高考教育出版社，2009.4 ～ 5

2 漆安慎，杜婵英. 普通物理学教程 力学(第二版). 北京：高等教育出版社，2005.139 ～ 147

3 张九铸. 一般运动刚体恢复系数公式的适用条件. 力学与实践，2010，3(32)：116 ～ 117

4 张九铸. 平面运动刚体的恢复系数公式的推导. 大学物理 2009，8(28)：23 ～ 24

5 郭项鸿. 电动力学(第三版). 北京：高等教育出版社，2008.192 ～ 208

Proving on Compton Effect and Its Elastic Restitution Coefficient

Jiang Fujin

(Huangpi No.1 High School，Wuhan，Hubei 430300)

Abstract：This essay analyzes the elastic collision at macro low speed in 2－dimension，finding the Coefficient of restitution 1. Furthermore，some researches are conducted on the Compton effect through the Coefficient of restitution，which proves that the Coefficient of restitution in the elastic collision at micro high speed in 2－dimension is also 1.

Key words：compton effect；special theory of relativity；elastic collision；coefficient of restitution