

# 带电粒子在四电荷系统内的运动模型及其应用

徐斌 陈浩

(华南师范大学物理与电信工程学院 广东 广州 510006)

(收稿日期:2015-05-13)

**摘要:**以对称分布的四电荷系统为例,研究任意带电粒子在对称的电场分布内的运动性质,借助椭圆函数和积分的方法分别推导出粒子的运动学方程,探讨了该类运动模型在求解物理问题时的应用.

**关键词:**四电荷系统 对称电场分布 物理教学

## 1 引言

大学物理静电场的教学中重点讨论过单个点电荷及电偶极子等带电系统的电场分布<sup>[1]</sup>.任意带电粒子在对称的电场分布内运动的模型在以往的教学并不常见,然而这种模型的很多性质可用于大学物理课堂教学中.本文以四电荷系统为例,从能量角度出发具体分析了四电荷系统的性质,对不同初始能量的任意带电粒子在电场中的运动进行定量分析,在对电势分布作不同的近似后,采用两种方法推导出运动学方程,分别分析了任意带电粒子在系统中运动的线性和非线性性质,并重点介绍了该体系在物理教学中的应用.

## 2 模型的介绍

如图1所示,边长均为 $2a$ 的矩形的4个顶点固定4个等量同号的点电荷,讨论与场源电荷异号的任意带电粒子在对称轴线(以下讨论以 $x$ 轴为例)上的运动情况<sup>[2]</sup>.

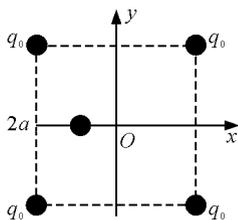


图1 四电荷模型示意图

建立如图1所示的坐标系,设点电荷的电荷量为 $q_0$ ,运动带电粒子的电荷量为 $-q$ ,可以得出带电粒子在 $x$ 轴上的电势能分布方程<sup>[3]</sup>

$$E_p(x) = \frac{-qq_0}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a+x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a-x)^2}} \right] \quad (1)$$

分布如图2(作图时 $a$ 取16 m且参数 $\frac{q_0}{2\pi\epsilon_0}$ 取1),在图2中可看出电势能曲线呈现一个势垒 $(0, E_{pmax})$ ,两个势阱,势阱的坐标分别为 $(-x_0, E_{pmin})$ 和 $(x_0, E_{pmin})$ .

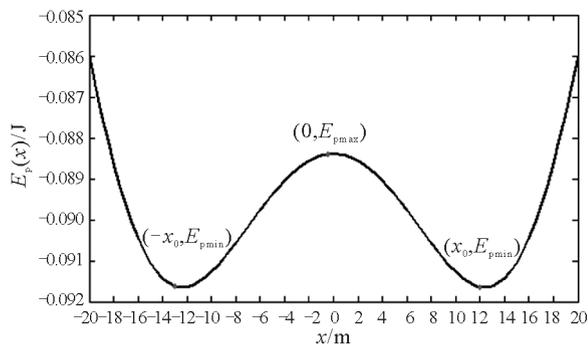


图2  $E_p(x) - x$ 图

## 3 模型在物理教学中的应用分析

从能量的角度论述带电粒子在给定区域的运动情况,取无穷远处为电势零点,令 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$ 为带电

作者简介:徐斌(1991-),男,在读硕士研究生,主研方向为物理课堂教学、国外物理教材分析.

指导教师:陈浩(1959-),男,教授,硕士生导师,博士,主研方向为理论物理,包括非线性物理、量子场论和凝聚态物理等前沿领域以及理论物理的教学研究.

粒子的初速度;  $x|_{t=0} = x_0$  为其初位移;  $E$  表示带电粒子的总能量(初能量). 忽略粒子运动过程中的电磁辐射, 则运动过程中能量守恒

$$E = \frac{1}{2}M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) \quad (2)$$

结合图2及给定的总能量  $E$  对带电粒子的运动情况定性分析.

### 3.1 模型一般性质的分析

当  $E = E_{pmax}$  时, 带电粒子静止在势垒上, 但此时的静止状态是一个亚平衡态, 如果给一个沿  $x$  轴的微小扰动它将离开亚平衡位置做大振动. 当  $E = E_{pmin}$  时, 运动电荷静止在势阱处, 此时为平衡态, 如果给一个沿  $x$  轴的微小扰动它将离开平衡位置做小振动. 当  $E > 0$  时, 由于运动电荷的电势能总是小于零, 可见速度  $v$  不可能为零, 所以此时运动电荷必定一直运动至无穷远, 和天体物理中动能大于引力势能时即可发射一颗卫星离开行星的情况一样, 此时带电粒子的能量超过电势能分布的最高能量, 将不受电场束缚, 运动到无穷远处. 当  $E_{pmax} < E < 0$  时, 带电粒子将以势垒顶部为平衡位置来回振动. 当  $E_{pmin} < E < E_{pmax}$  时, 带电粒子将在其中一个势阱中运动.

### 3.2 模型的教学意义分析

#### 3.2.1 线性振动的研究

重点讨论  $E_{pmin} < E < E_{pmax}$  的情况, 对应  $x$  轴坐标范围为  $-\frac{4\sqrt{13}}{13}a < x < \frac{4\sqrt{13}}{13}a$ , 对电势求负梯度得<sup>[3]</sup>

$$-\nabla E_p(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2(a+x)}{[a^2 + (a+x)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(x-a)}{[a^2 + (a-x)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (3)$$

对式(3)右边作泰勒展开, 忽略4次及以上项, 得

$$-\nabla E_p(x) = -\frac{\sqrt{2}q_0}{8a^3\pi\epsilon_0}x \quad (4)$$

则带电粒子的动力学方程为

$$F = -\nabla E_p(x) \cdot (-q) = \frac{\sqrt{2}qq_0}{8a^3\pi\epsilon_0}x \quad (5)$$

为一维线性方程, 带电粒子做简谐振动. 若令  $k =$

$-\frac{\sqrt{2}qq_0}{8a^3\pi\epsilon_0}$ ,  $-\frac{k}{M} = \omega^2$ , 振幅为  $A$ , 可进一步求出简谐振动的运动学方程

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

此时, 每一个能量值对应两个不同的解, 而带电粒子的运动情况只能取其一, 具体情境中振动的位置与  $A$  的取值有关, 即若  $A < 0$ , 则粒子的振动范围在  $\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}a, 0\right)$ ; 若  $A > 0$ , 则粒子的振动范围在  $\left(0, \frac{4}{\sqrt{13}}a\right)$ . 但两种振动情况都对对应同一个能量值,

所以这种情况下带电粒子的能量简并. 两个不同的解可理解为带电粒子运动的两种不同简并状态. 再深入考察这两个解时, 可以发现二者都没有关于  $y$  轴对称(坐标反演不变), 都各自在双势阱一边的势阱中振荡, 我们知道带电粒子的哈密顿量是坐标反演不变的, 这种情况下系统显然发生了对称性破缺.

可见, 带电粒子在这种情况下的运动模型非常类似于量子场论中对称性自发破缺的例子. 因此, 我们可以把  $E_{pmax}$  看作是体系对称性破缺的临界能量,  $E_{pmin}$  则为基态能量, 当带电粒子处在基态能量与临界能量的范围内时, 它的运动情况发生了对称性破缺, 其解只能是任意一个, 而它们都不具有哈密顿量的坐标反演不变对称性, 而当带电粒子的能量高于临界能量时, 它的运动情况只有一种, 其解具有与哈密顿量相同的坐标反演不变对称, 这时候系统的对称性没有遭到破坏<sup>[4]</sup>.

在经典力学中存在不少对称性破缺的例子, 一般和能量的取值有关. 比如一支铅笔垂直静止放置时的重心很高, 重力势能较大, 此时系统是关于沿铅笔头、尾所在的直线轴对称的. 而一旦给铅笔一个微扰后, 铅笔会倒下来, 此时能量降低了, 但是轴对称性亦被破坏了. 本系统也不例外, 我们看到, 当能量降低到一定程度(到达临界能量)时, 就会出现对称性破缺. 故本文所讨论的系统有助于形象地理解场论中关于自发对称性破缺的模型<sup>[5]</sup>.

#### 3.2.2 非线性振动的研究

结合式(1)、(2)得

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2E}{M} + \frac{qq_0}{M\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a+x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a-x)^2}} \right] \quad (7)$$

令  $f(x) =$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + (a+x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a-x)^2}} \quad (8)$$

对式(8)作泰勒展开,忽略6次及以上项,得

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{\sqrt{2}}{8a^3}x^2 - \frac{13\sqrt{2}}{128a^5}x^4 \quad (9)$$

则式(7)可化简为

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{M} + \frac{qq_0}{M\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{\sqrt{2}}{8a^3}x^2 - \frac{13\sqrt{2}}{128a^5}x^4\right) \quad (10)$$

借助椭圆函数解法,可求出带电粒子的运动学方程<sup>[4]</sup>

$$x = A_1 \operatorname{dn}[k_1(t - t_1), m_1] \quad (11)$$

由于 $E$ 的取值有限定且模数 $m_1 \in (0, 1)$ ,  $A_1^2, k_1^2 >$

0, 令 $c = \frac{qq_0}{\pi\epsilon_0}$ , 有

$$m_1^2 = \frac{27\sqrt{2}c + 52aE - \sqrt{54c^2 + 52\sqrt{2}caE}}{13\sqrt{2}c + 26aE} \quad (12)$$

$$A_1^2 = \frac{8\sqrt{2}a^2(\sqrt{2}c + 2aE)}{-c + \sqrt{27c^2 + 26\sqrt{2}caE}} \quad (13)$$

$$k_1^2 = \frac{13c}{8Ma^3} \frac{(\sqrt{2}c + 2aE)}{-c + \sqrt{27c^2 + 26\sqrt{2}caE}} \quad (14)$$

令 $k_1 > 0$ , 则

$$t_1 = \frac{1}{k_1} F\left[\frac{1}{m_1} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_1}\right)^2}, m_1\right]$$

且 $\operatorname{sgn}(A_1) = \operatorname{sgn}(x_0)$ , 其中 $F(u, m)$ 为第一类 Legendre 椭圆积分,  $\operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数.

分析运动学方程可知, 振动频率 $k_1$ 不仅与质量 $M$ 有关, 而且 $k_1^2 \propto A_1^2$ , 都是随着带电粒子初始能量的增大而增大, 体现了非线性运动的一个特征——自相互作用; 对于周期 $T$ , 非线性振动的周期与频率

之积并非常量, 它和椭圆函数的振荡周期相关, 与带电粒子的振动频率也有关, 即使在相同频率的情况下, 不同的模数也对应不同的振荡周期, 在线性(简谐)振动中周期和频率的等价性在非线性振动中失效, 显示了非线性振动的复杂性. 因此, 本文所研究的模型可用于线性振动和非线性振动的比较教学中<sup>[6]</sup>.

#### 4 结语

本文所研究的运动模型有助于学生理解场论中的对称性破缺概念, 在非线性教学中, 同样有辅助教学的作用, 因此该模型可以作为大学物理教学中的一个例子. 四电荷系统只是对称电荷系统中的一个特例, 其他对称分布电场的性质也是类似的, 本文的研究方法和视角对研究其他对称分布有一定的借鉴意义.

#### 参考文献

- 1 赵凯华, 陈熙谋. 新概念物理教程 电磁学(第2版). 北京: 高等教育出版社, 2006. 1 ~ 42
- 2 孙晓林, 董慎行. 带电粒子在四电荷点阵中的运动. 物理与工程, 2005, 5(15): 12 ~ 16
- 3 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程(第2版). 北京: 北京大学出版社, 2012. 59 ~ 61
- 4 戴元本. 相互作用的规范理论(第2版). 北京: 科学出版社, 2005. 35 ~ 46
- 5 J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg. Broken Symmetries. Phys. Rev. 1962, 127(3): 965 ~ 970
- 6 夏清华, 汪秉宏, 兰学忠. 一个非线性力学问题的解析解. 大学物理, 2004, 5(23): 9 ~ 11

## The Charged Particle's Motion Model and Its Application in a Four - charge System

Xu Bin Chen Hao

(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006)

**Abstract:** In the case of the four - charge system, the vibrations of charged particles in symmetrical distribution of the electric field are investigated. With the elliptic function and integral technique, the kinematics equation of particle is presented, respectively. The model investigated in this paper can help students understand spontaneous symmetry breaking and nonlinear physical knowledge in college physics teaching.

**Key words:** four - charge system; symmetrical distribution of the electric field; physics teaching