# 从沙堆到宇宙*

## —— 一种物理学的新视角

宿非凡　任炜东
（中国科学院物理研究所　北京　100080）
任炜东
（北京中学　北京　100028）

（收稿日期：2015－06－11）

**摘　要**：以微观-宏观-巨观-微观为顺序，以生活中常见的沙堆为主线从量子力学中 常见的一维可解势出发研究粒子在均匀的引力场中的情况，并从此得到启发回到经典物理范畴内，用 Newton 力学和统计物理的方法研究宏观的沙堆问题，最终由沙堆问题类比、延伸到整个宇宙的 Standard Model 理论和 Higgs Boson 理论，从沙堆到宇宙的分析表明，物理学绝对不是一块一块“量子化”的体系；而是存在高度内在联系、浑然一体的理论体系，俨然呈现出物理学整体的和谐之美.

**关键词**：物理学　Newton 力学　量子力学　统计力学

考虑一个沙堆，其处于定域空间内且环境绝对理想，除重力之外不计任何外界影响，沙子之间只存在滑动没有滚动，那么如果极其缓慢的增大沙堆体积（甚至一粒一粒的增加）而不是把沙子快速大量的倒撒在某一区域，沙堆能够保持几何相似的均匀增大吗？沙堆将总会是锥体吗？

## 1　量子力学的一维引力势场

在量子力学（非相对论性理论）之中，能严格求解的势场不多. 在一维定态的情况下，比较重要的能严格求解出束缚态能级和波函数的势场有一维 $\delta$ 势、一维方势阱、一维谐振子和引力势等. 考虑经典理论中最常见的引力势场

$$U(x)=mgx \tag{1}$$

相应的定域边界条件是

$$\psi(0)=0 \qquad \psi(\infty)=0 \tag{2}$$

引入数学变换

$$\xi=\frac{x}{l}-\lambda$$

$$l^3=\frac{\hbar^2}{2m^2g} \qquad \frac{2mE}{\hbar^2}=\frac{\lambda}{l^2}$$

其中 $l$ 为特征长度，则相应的 Schrödinger 方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}-\xi\psi=0 \tag{3}$$

它的解为$\frac{1}{3}$阶的 Bessel 函数. 满足定域边界条件(3)的解是 Airy 函数

$$\begin{cases}\psi=C\,\dfrac{1}{\hbar}\sqrt{\dfrac{\xi}{3}}K_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right),(\xi>0)\\ \psi=\dfrac{C}{3}\sqrt{|\xi|}\left\{J_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\ |\xi|^{\frac{1}{3}}\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\ |\xi|^{\frac{2}{3}}\right)\right\},\\ \qquad (-\lambda\leqslant\xi\leqslant 0)\end{cases} \tag{4}$$

相应的能量本征值 $\lambda$ 为 Airy 函数的零点，由

$$A_i(-\lambda)=0$$

给出.

当 Airy 函数的阶数很大时，相应的能量本征值可以有下式给定

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2ml^2}\left\{\frac{3\pi}{4}(2n-1)\right\}^{\frac{2}{3}},(n\gg 1) \tag{5}$$

* 系首都师范大学“北京市中小学特级教师研修工作室”项目的研究成果之一.

在量子力学中可以严格求解一维引力势这一事实提示我们，量子全同体系在均匀场中存在着可以解析表达的性质，其具有实际的统计意义，利用统计理论可以清晰地宏观掌握整个体系的性质；而且与一般认为统计方法常用于热力学体系的观点不同，在纯力学体系中统计方法也具有重要的意义.

## 2　经典理论的 Newton 力学与统计力学

在我们一般生活的空时尺度之中，常用的是经典低能近似，即令 Plank 常量趋于零且光速趋于无穷大. 在这个近似之下，Newton 力学可以很好地表述物理规律.

考虑一个沙堆，其处于定域空间内且环境绝对理想，除重力之外不计任何外界影响，沙子之间只存在滑动没有滚动. 应用牛顿力学来研究每一粒沙子的动力学特征，在这种情况之下不失一般性的，可以认为每粒沙子都完全相同但是可以编号（即非量子全同）. 设每粒沙子为均匀球体其半径为 $R$，沙与沙之间的滑动摩擦因数为 $\mu$，沙子在沙堆上运动的速度为 $v$，沙堆的初始高度为 $h_0$.

可以想象，如果极其缓慢地增大沙堆体积（甚至一粒一粒的增加），而不是把沙子快速大量的倒撒在某一区域应该可以保持沙堆几何相似的均匀增大.

当单位时间内沙堆新增的沙子个数 $\nu$（弛豫条件）为

$$\nu \leqslant \frac{v h_0^2 \sin(\arctan \mu)}{\{h_0^3 + 4R^2 v t \sin(\arctan \mu)\}} \tag{6}$$

即整个体系演化足够缓慢时，可以认为每一粒沙子都始终处于平衡态，整个沙堆体积将保持几何相似的均匀变大. 从弛豫条件可以看出，如果要维持沙堆几何均匀变大必须使单位时间内沙堆新增的沙子数变少，即随着沙堆的增大单位时间内增加沙子的粒数要相应的减小.

如果取 $\mu = 0.06$，$v = 10\ \mathrm{m \cdot s}$，$R = 0.1\ \mathrm{mm}$ 从上面的讨论可以知道，如果要使一个 $h_0 = 1\ \mathrm{m}$ 沙堆几何相似的增加 $\Delta h = 1\ \mathrm{m}$，需要 $2 \times 10^7\ \mathrm{s}$（约 241 天），而将沙堆垒高到 $h = 6\ \mathrm{m}$ 则需要 $6 \times 10^5$ 年！

这个结果充分说明，在实际的生产生活中不可能使沙堆保持几何相似的均匀增大. 那么，实际上沙堆会怎样增大体积，在这个问题上从本文第 1 节的量子一维引力场得到启发，对于数量很大的纯力学体系，也可以应用统计方法. 故以下应用统计力学和熵增加原理来对这个问题加以分析.

为研究实际情况下沙堆的状态，设想已经存在一个沙堆，此沙堆处于定域的空间内，如果在整个沙堆中考虑一个宏观足够小，微观足够大的体系. 类比能带理论的建立过程且根据对称性可以将这个体系与周围其他体系的相互作用等效视为零. 由于整个沙堆处于定域空间内，故可以将沙堆的体积微元为一个个“方箱”，每个方箱相当于一个 $\Gamma$ 空间，可以选取 $\Gamma$ 空间使得上述每一个宏观足够小，微观足够大的体系都恰好占据一个 $\Gamma$ 空间.

这样一来，可以将沙堆视为一个含有 $N$ 个沙粒的理想体系，被封闭于体积 $V$ 中，在体积 $V$ 中划出一个小的 $\Gamma$ 空间其体积 $V_0$. 则求解 $V_0$ 中含有 $n$ 个沙粒的概率以及概率最大的条件，则从统计力学的角度而言这种最概然情况就是实际情况中沙堆应具有的状态.

这个概率可以表示为

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!\ (N-n)!} \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)^{N-n} \tag{7}$$

利用 Stirling 公式可将上式表示为

$$\begin{aligned} \ln W_N(n) = N\ln N - N - n\ln n + \\ n - (N-n)\ln(N-n) + N - n + \\ n\ln\frac{V_0}{V} + (N-n)\ln\left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \end{aligned}$$

再利用极值条件可得

$$n = N\frac{V_0}{V} \tag{8}$$

式(8) 表明，沙粒在体积 $V$ 中均匀分布时概率最大. 均匀分布即平均分布是最概然分布. 也就是说，在实际情况中沙堆最终自发地倾向于充满整个定域空间. 也就是说，如果我们将沙子倒在比沙子总体积略小的定域空间里，沙子最终将不会是锥体而是与定域空间形状相同，这与实际情况符合得很好.

### 3 Standard Model 与我们的宇宙

为什么沙堆会自发地填充整个定域空间？为什么保持其几何相似变大是不可能的？从微观的量子力学到宏观的经典力学再到巨观的宇宙，物理学家相信这都是由一个简单的规律所支配的.

大爆炸理论告诉我们，宇宙在初始时刻有一定的物质，随着时间的演化这些物质就将像沙粒一样自发的充满整个空间且广义相对论证明宇宙不是以几何相似的均匀增大. 我们前面也证明了沙堆有着类似的性质，这说明宇宙有着和沙堆遵守着相同的物理法则.

的确，在某种层面上思考上面关于沙堆的讨论有益于理解我们的宇宙. Standard Model 告诉我们宇宙里只有处处都有“沙粒”才有可以发生物理过程的空间和时间. 空间是物质的，没有物质空间将毫无意义，就像没有沙粒的沙堆即将不是沙堆一样. 只不过这里的“沙粒”是尺度极小的粒子，这些小粒子组成了各种各样的物理场又以对称性自发破缺的形式形成了质量、电荷等基本物理量.

举例而言，如果沙堆内部沙粒完全均匀，我们在其中任何位置将不会感觉到有不同(各向同性)；但是，如果因为存在扰动(例如有一滴水被放入沙堆里)有一些沙子打破了这种高度的对称聚集到了一起，我们就会感觉到这些聚集起来的沙粒和其他沙粒有明显的不同. 在我们的宇宙里这些“沙粒”就是 Higgs Boson，而 Standard Model 告诉我们质量正是由于上面的机制而出现的. 这些组成质量的“沙粒”总会以极快的速度自发地保持均匀分布，这也是很难观察到 Higgs Boson 的原因.

**参 考 文 献**

1 Landau. Non - relativistic quantum mechanics，2008. Beijing：Higher Education Press sixth edition (in Chinese). 40 ～ 75

2 Peskin. An Introduction to Quantum Field Theory，2006. New York：Westwiew Press. 689 ～ 728

(上接第 124 页)

是忽略了流体元微观粒子的无规热运动，或者说是 $< v'^2 >$ 趋于零的冷流体近似.

**参 考 文 献**

1 王海婴，大学基础物理学. 北京：高等教育出版社，2000. 95

2 周丰群，大学物理学(上). 成都：四川大学出版社，2001. 219

3 刘扬正，张伟强. 大学物理(上). 北京：科学出版社，2011. 77

4 S. 查普曼，T G. 考林著. 非均匀气体的数学理论. 北京：科学出版社. 1985

5 L. D. Landau，E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics，2nd ed.，New York：Pergamon Press. 1987. 2

# Discussion on Ideal Fluid Approximation

Zhao Bin

(Department of Mathematics and Physics，Nanjing Institute of Technology，Nanjing，Jiangsu 211167)

：The approximation of ideal fluid are documented in this article which are not well defined in some college physics textbooks. From the point of view thermodynamics，the dissipation of fluid naturally arises from the random motion of microscopic particle of fluid. Therefore，the approximation of ideal fluid may be explained that fluid is regarded as cold one.

**Keywords**：ideal fluid；Navier - Stokes equation；Fourier conduction law；Newton viscosity law