

用 Tracker 软件分析油浸弹簧振子的阻尼振动

杜江

(云南师范大学 物理与电子信息学院 云南 昆明 650500)

(收稿日期:2015-10-11)

摘要:利用 Tracker 视频软件的自动追踪功能,有效地跟踪油浸弹簧振子的阻尼振动,实时描绘出振动的位移-时间图像,利用软件自带的功能拟合出振动曲线方程,计算出该弹簧振子的阻尼系数,并通过转换坐标得到运动的相图.

关键词:Tracker 软件 视频分析 阻尼振动 振动曲线 阻尼系数

油浸弹簧振子做阻尼振动,但其振动周期不易测出,运动图像也不能方便地绘出. Tracker 软件是一款视频追踪软件,能够通过逐帧对目标点进行跟踪,实时描绘出运动的位移-时间图像对其进行定量分析.可以利用其曲线的拟合功能拟合出振动曲线并算出阻尼系数和阻力系数.

1 阻尼振动的运动方程

如图 1 所示,由流体力学可知,当弹簧振子的速度较小时,其所受阻力的方向和速度的大小成正比,

即

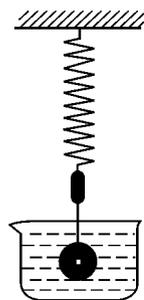
$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dy}{dt} \quad (1)$$


图 1

由牛顿第二定律,得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\kappa y - \gamma \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

式中 γ 是阻力系数, κ 是弹簧的劲度系数. 得

$$y_{i+1} - y_0 = v_0 t_{i+1} + \frac{1}{2} a t_{i+1}^2$$

后面的式子减前面的式子,得

$$y_2 - y_1 = v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2^2 - t_1^2) =$$

$$v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1) (t_2 + t_1) =$$

$$v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t (2t_1 + \Delta t) =$$

$$(v_0 + at_1) \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 =$$

$$v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

同理: $y_{i+1} - y_i = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$

即 $y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$

由式(1),得:

$$v_1 = v_0 + at_1$$

$$v_2 = v_0 + at_2$$

.....

$$v_i = v_0 + at_i$$

$$v_{i+1} = v_0 + at_{i+1}$$

后面的式子减前面的式子,得

$$v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) = a \Delta t$$

.....

$$v_{i+1} - v_i = a \Delta t$$

即 $v_{i+1} = v_i + a \Delta t$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\kappa}{m}y - \frac{\gamma}{m} \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

令

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}$$

其中 ω_0 为振动系统的固有角频率, β 为阻尼系数, 和振动系统的性质以及介质的性质有关. 于是阻尼振动的微分方程可写为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (4)$$

此方程的通解为

$$y = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (5)$$

为了与高中教材吻合, 此处只讨论阻力很小的欠阻尼状态的阻尼振动, 即 $\beta < \omega_0$, 由上式可求出弹簧振子中质点的运动学方程为

$$y = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

式中 A_0 和 φ_0 为待定常数, 由初始条件决定. 此方程说明阻尼振动的振幅 $A = A_0 e^{-\beta t}$ 将随时间成指数衰减, 直至停止^[1].

2 Tracker 软件简介及实验操作步骤

2.1 软件简介

Tracker 是一款免费的视频追踪分析和建模工具软件. 软件支持 mov, avi, mp4, flv, wmv 等多种常见视频格式. 既可以手动又可以自动跟踪目标的位置, 依据其内建的算法得出速度、加速度等物理量并加以动态显示, 做出对应的图像. 还可以对图像进行拟合、积分等操作. Tracker 软件通过提供比例尺的设置来将视频中的场景还原成真实的长度, 从而得出准确的数据. 软件还可以建立运动模型和动力学模型进行模拟. 为教师和学生探究物理现象和规律提供了极大的方便^[2~4].

2.2 实验操作步骤

(1) 按如图 1 装置安装油浸弹簧振子. 为了 Tracker 软件能准确地追踪目标, 需要将目标物与背景的颜色有强烈的对比, 所以在弹簧下的细绳上

涂黑一段作为标志.

(2) 将视频导入 Tracker 软件中. 首先根据实际长度进行定标, 然后通过观看视频, 选择合适的始末帧数来确定要分析的视频中物理过程的起点和终点. 如图 2 所示.

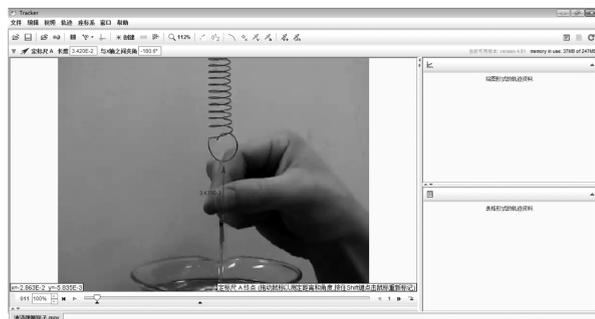


图 2 Tracker 软件窗口

(3) 创建一个质点对象, 按下 Ctrl + Shift 键, 将出现的白色圆形光标定位到标记位置, 鼠标单击后将弹出“Autotracker”对话框. 在对话框中点击“搜索”, 软件将自动追踪目标的位置, 并实时记录位移与时间数据, 自动描绘出位移-时间图像. 如图 3 所示.



图 3 设置位置追踪窗口

(4) 数据采集完毕后, 软件自动绘出所需要的图像, 其中横纵坐标表示的物理量可以选择. 这里我们需要做位移-时间图像, 所以纵坐标选“y”横坐标选“t”. 如图 4.

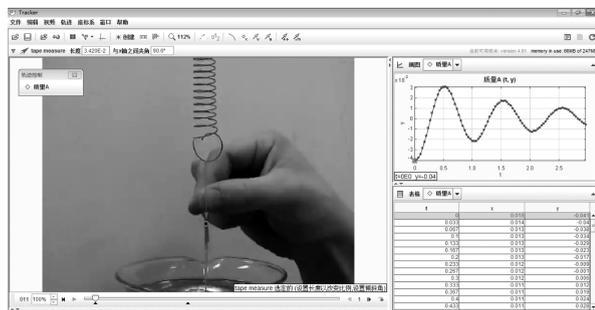


图 4 数据采集及图像描绘

(5) 双击位移-时间图像进入数据工具界面,在“Analyze”按钮,勾选“拟合”选项,Tracker软件自带了线性拟合、抛物线拟合、三次曲线拟合、高斯曲线拟合、指数曲线拟合、正弦曲线拟合工具,还可以自编公式拟合.根据式(6),将软件公式编辑为

$$y = A0 * e^{(-bt * t)} \cos(B * t + C)$$

其中 bt 代表 β , B 代表 ω , C 代表 φ_0 , 通过手动调整参数,可使得拟合曲线和实验曲线达到最大的匹配程度,如图5所示.

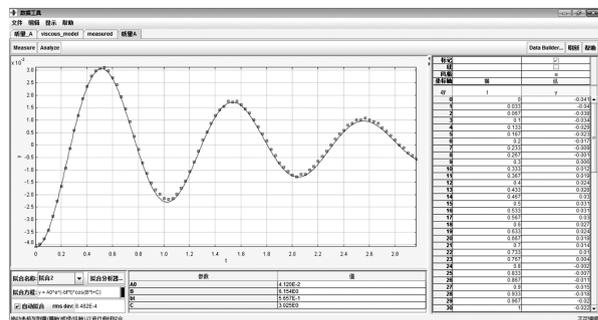


图5 阻尼振动拟合曲线图

图5中方点为实验采集数据段,曲线为拟合曲线.由此可知拟合方程为

$$y = 0.0412 e^{-0.5657t} \cos(6.154t + 3.025) \quad (7)$$

即弹簧振子在做周期 $T = \frac{2\pi}{6.154} \text{ s} = 1.020 \text{ s}$, 初振幅为 0.0412 m , 且随时间指数衰减的周期运动, 衰减系数 $\beta = 0.5657 \text{ s}^{-1}$. 实验中所用小球的质量 $m = 0.08 \text{ kg}$, 得阻力系数 $\gamma = 2m\beta = 9.051 \times 10^{-2} \text{ kg/s}$. 弹簧的劲度系数 $\kappa = 3.0 \text{ N/m}$, 根据式(6)可得此阻尼振动角频率的理论值为

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 6.0975 \text{ s}^{-1} \quad (8)$$

由式(7)可知此阻尼振动角频率的实验值为 6.154 s^{-1} , 实验值与理论值相对误差为 0.9% , 说明用 Tracker 软件测量的结果合理^[5].

(6) 此外, 点击画图窗口的横轴和纵轴选项, 选为 $v_y - y$ 图像, 即出现阻尼振动的相图, 如图6所示, 可以看出此相图是一个收缩的螺旋线^[6], 代表振子的能量不断衰减, 振幅不断缩小, 最终停止振动.

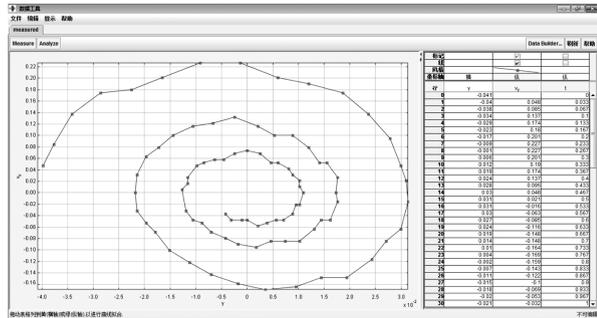


图6 阻尼振动运动相图

3 小结

Tracker 软件可以跟踪目标的位置, 实时记录数据, 并计算出速度、加速度等相关物理量. 它是描绘图像并进行数据分析的功能强大的软件. 利用软件对油浸弹簧振子的运动进行分析, 可以准确地记录振子的运动轨迹, 并通过数据分析工具拟合出运动方程, 得到运动相图. 可以计算出阻尼系数、振幅、周期、频率等. 不仅有助于学生对阻尼振动的理解而且也能用这种方法进行相关量的测量. 且成本低廉可操作性强. 但是, 由于油浸弹簧振子振动时间短, 数据采集量有限, 所以其图像的描绘, 方程的拟合, 相图的得到都有一定的误差. 对于能采集大量数据的实验此方法精度较高.

参考文献

- 1 漆安慎, 杜焯英. 普通物理学教程·力学. 北京: 高等教育出版社, 2006
- 2 吴志山. 让真实定量、定格——Tracker 软件在物理教学中的应用. 物理教师, 2012, 33(7): 53 ~ 54
- 3 李玉峰, 熊建文, 杨友源. 视频分析软件在物理实验中的应用. 实验室研究与探索, 2009, 28(4): 62 ~ 64
- 4 丁晓彬, 董晨钟. 基于 2D 开源视频分析和建模软件 Tracker 研究抛体运动实验. 大学物理, 2012, 31(7): 34 ~ 36
- 5 王经淘, 程敏熙, 贾昱, 李荣妹. 利用 Tracker 软件分析气垫导轨上弹簧振子的阻尼振动. 大学物理, 2014, 33(4): 22 ~ 24
- 6 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程·力学(2版). 北京: 高等教育出版社, 2004