巧用“几何平均值”求解“与距离平方成反比”的力做功

程　柏

(新疆生产建设兵团第七师高级中学　新疆 伊犁　833200)

(收稿日期:2015－11－17)

摘　要:万有引力与库仑力是高一、高二学生在学习物理时所遇到的两种大小与距离平方成反比的力,求解这种变力做功,是深刻认识这两种场力,进一步体会保守力场势能概念的重要过程.然而此阶段的高中生并未学习到微积分这一数学工具,如果只是简单地告知引力势能或两个点电荷间的电势能的表达式,这对于学有余力的优等生在概念建构上是不利的.为避免教师“想讲清楚,但讲不清楚”的尴尬境地,可采用初等数学的“几何平均值”法来求解这种变力的功.

关键词:几何平均值　万有引力　库仑力　功

1　万有引力的功与引力势能

如图 1 所示,以地心为坐标原点,沿地球半径方向建立 x 轴.

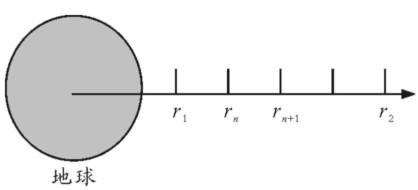

图 1

设地球质量为M,当质量为m的物体从距离地心r_2处沿x轴移到距离地心r_1处过程中,引力做的功可以这样计算:把r_1到r_2的距离分成无限多个小段,取其中第n小段,从与地心距离r_{n+1}到r_n,$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n$为一小量,在该区间内引力近似为一常量,有

$$F_n = G\frac{Mm}{\left(\dfrac{r_n + r_{n+1}}{2}\right)^2} = G\frac{4Mm}{(r_{n+1} - r_n)^2 + 4r_n r_{n+1}} = G\frac{4Mm}{(\Delta r_n)^2 + 4r_n r_{n+1}}$$

$(\Delta r_n)^2$ 为高阶小量,微乎其微,忽略不计,上式简化为

$$F_n = G\frac{Mm}{r_n r_{n+1}}$$

即在第n小段,可以用几何平均值法找到一点,令$r_i = \sqrt{r_n r_{n+1}}$;此处的力

$$F_n = G\frac{Mm}{r_n r_{n+1}}$$

具有承上启下的意义,正是可作为第n小段的几何平均恒力来求此段“平方反比”变力的功.

这个过程万有引力的功为

$$\Delta W_n = F_n \Delta r_n = G\frac{Mm}{r_n r_{n+1}}\Delta r_n = GMm\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}\right)\frac{1}{r_{n+1} - r_n}\Delta r_n = GMm\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}\right)$$

则物体从r_2处移到r_1处过程中,引力的总功为

$$W = \sum \Delta W_n = GMm\sum\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{GMm}{r_1} - \frac{GMm}{r_2} = \left(-\frac{GMm}{r_2}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_1}\right)$$

从表达式中不难发现,引力的功导致了$-\dfrac{GMm}{r}$这一物理量的变化,它是否反映了某种能量的含义?由动能定理知:物体动能的增量$\Delta E_k = W$,然而动能从何转化而来?类比讨论重力势能的经验,不难体会到,“$-\dfrac{GMm}{r}$”随着相对位置的变化而变化,具备势能的特征,因此可称为引力势能.由于假设质量为m的物体由距地心较远的r_2处移到较近的r_1处,引力做正功,势能减小,势能增量ΔE_p为负值,如果记r_1和r_2处的势能分别为E_{p1}和E_{p2},则势能的

减少量即为动能的增量,即

$$E_{p2}-E_{p1}=\left(-\frac{GMm}{r_2}\right)-\left(-\frac{GMm}{r_1}\right)=$$
$$-\Delta E_p=\Delta E_k=W$$

一般地,常把物体在无穷远处($r_2\to\infty$)时的势能看作零势能点($E_{p2}=0$),则对于上式可知物体位于距地球球心 O 点为 $r(r=r_1)$ 处时的引力势能为

$$E_p=-\frac{GMm}{r}$$

为物体和地球系统共同具有.

2　库仑电场力的功与两个点电荷系的电势能

由于所有带电体的电场均可以等效视为一系列点电荷电场的叠加,故研究点电荷库仑电场力做功就具有很重要的意义.

如图 2 所示,在 O 点固定一个电荷量为 $+Q$ 的点电荷,另一个带电量为 $+q$ 的点电荷位于距离 O 为 r_a 的 a 点,沿任意路径运动到距离 O 为 r_b 的 b 点,如何计算库仑电场力的功呢?

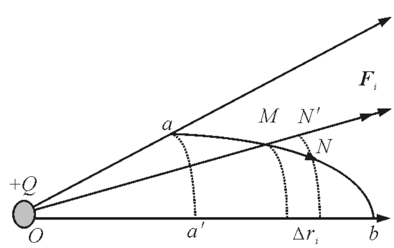

图 2

将时间(或空间)分成无数小段,便可"以恒代变""以直代曲",然后累积取舍,使之向真实情况无限趋近.这是物理学中常用的一种处理类似于上述复杂问题行之有效的思维方法.基于这种思维方法,我们将运动路径分割成无数个有限小段.每一小段即可看成是恒力作用下的运动,进而求这一小段的功.

取任意小段 MN,设其位移为 $\Delta\boldsymbol{l}_i$,点电荷在 M 点所受的电场力为 $\boldsymbol{F}_i$,电场力在这一小段位移的功为

$$\Delta W_i=F_i\Delta l_i\cos\theta_i$$

式中 θ_i 为位移 $\Delta\boldsymbol{l}_i$ 与电场力 $\boldsymbol{F}_i$ 的夹角.

以 O 为圆心,ON 为半径作一圆弧,交过 M 的电场线于 N' 点,当 MN' 很小时,则可认为 $MN'=\Delta l_i\cos\theta_i$.再以 O 为圆心,分别作 OM,ON 为半径的圆弧,使它们和 Ob 电场线相交,可以在 Ob 线上得到一小线段 $\Delta r_i=\Delta r=r_{i+1}-r_i$,其大小和 MN' 相等,在这小段 Δr_i 上做库仑力的几何平均值处理,有

$$W_i=F_i\Delta r_i=kQq\frac{1}{r_ir_{i+1}}\Delta r=$$
$$kQq\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)\frac{1}{r_{i+1}-r_i}\Delta r=$$
$$kQq\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)$$

根据点电荷电场的对称性可知,试探电荷从 M 移动到 N 过程中电场力所做的功与试探电荷沿电场线 Ob 移动 Δr_i 所做的功相等.

以此类推,可把点电荷 $+q$ 沿任意路径每一小段电场力的功都等同到同一电场线 Ob 上各相应小段电场力的功,这样,电荷沿任意路径从 a 移动到 b 时,都等同于从 a' 移动到 b 所做的功.可表示为

$$W=\sum_{r_a}^{r_b}\Delta W_i=$$
$$kQq\sum_{r_a'}^{r_b}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_{i+1}}\right)=\frac{kQq}{r_a}-\frac{kQq}{r_b}$$

显然保守力的功反映的是势能的变化,故把"$k\dfrac{Qq}{r}$"称为两个点电荷系的电势能.即

$$E_{p_a}-E_{p_b}=-\Delta E_p=$$
$$W=\frac{kQq}{r_a}-\frac{kQq}{r_b}$$

选取无穷远处($r_b\to\infty$)为零电势能点,则电荷 q 距离场源电荷 Q 为 r 处的 a 点($r_a=r$)电势能即

$$E_p=k\frac{Qq}{r}$$

3　教学启示

应当重视"微元法"的显化,高中生即将进入大学深造,抽象思维开始快速发展,面对难以解决的问题需要新的思维方法,这就要求教师抓住机会向学生显化物理本质.继探究重力势能、弹簧变力功下的弹性势能后,对于学优生来说,掌握"平方反比"变力的功,探究引力势能和库仑场的电势能,对于深刻理解保守力场势能的概念很有好处,对促进学生运用数学知识解决物理问题的能力方面大有裨益!