大学物理教学

补偿法求刚体定轴转动惯量的一般解

冯金地

（信阳师范学院华锐学院理工系　河南 信阳　464000）

（收稿日期：2015－12－17）

摘　要：通过猜想加证明的方式得到了求解刚体定轴转动惯量的一个新推论，由这个推论可以将组合定理进行推广. 工程力学上常常遇到的求解形状复杂的均匀刚体的转动惯量时此推论将会特别有用. 本文最后通过一道例题，说明它具有简单、快捷的优点，并有独到之处.

关键词：转动惯量　叠加原理　补偿求和法

转动惯量是大学物理刚体力学中的一个非常重要的物理量，在求解刚体定轴转动和平面平行运动方程时首先必须要得到刚体的转动惯量. 刚体对某定轴的转动惯量为 $I=\sum_i \Delta m_i r_i^2$，特别的对连续体 $I=\int r^2\mathrm{d}m$. 文献[1]上册第三章表 3－1 给出了常用的转动惯量（未加证明）.

本文首先通过对该表几个典型刚体转动惯量的推导，探讨相似刚体之间转动惯量的内在逻辑关系，得到了转动惯量组合定理的一个新的推论 —— 补偿求和法；最后通过一道例题说明它在工程力学上可以简单快捷地求解某些结构复杂的刚体转动惯量；同时此推论对大学理工科学生关于刚体力学中转动惯量的深入理解也大有益处.

1　补偿求和法的引入

1.1　同心圆环的转动惯量

讨论匀质质量为 m，内外半径分别为 R_1 和 R_2 的薄同心圆环，求对其任一直径的定轴转动惯量. 如图 1 所示，以 y 轴为定轴，可先求均质，质量为 m，半径为 R 的薄圆盘（圆心与原点 O 重合，圆盘置于 xOy 平面内）对 y 轴的转动惯量.

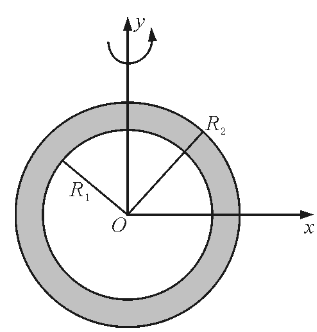

图 1　同心圆环的定轴转动

因积分区域为圆形，采用平面极坐标系 (r,θ)，如图取质元 $\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}S=\sigma r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，$\sigma$ 为质量面密度，质元 $\mathrm{d}m$ 到 y 轴距离 $r'=r\cos\theta$，则有

$$I=I_y=\int r'^2\mathrm{d}m=\iint(r\cos\theta)^2\sigma r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\sigma\int_0^R r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\pi\sigma R^4$$

代入 $m=\pi R^2\sigma$，得

$$I=\frac{1}{4}mR^2 \tag{1}$$

即为薄圆盘对任一过其直径的定轴转动惯量.

本题中，圆环可等价为质量为 m_1，半径为 R_1 的圆盘被挖去一个质量为 m_2，半径为 R_2 的同心圆盘，设两个同心圆盘对 y 轴的转动惯量分别为 I_1 和 I_2，则我们猜想所求薄圆环对 y 轴转动惯量 I 满足叠加

作者简介：冯金地（1984－　），男，硕士，讲师，从事大学物理、理论力学，量子力学等课程的教学和纳米磁性材料的研究工作.

原理

$$I=-I_1+I_2 \tag{2}$$

其中 I_1 为想象的. 则由式(1)，有

$$I=-\frac{1}{4}m_1R_1^2+\frac{1}{4}m_2R_2^2$$

而 $m_1=\pi R_1^2\sigma$，$m_2=\pi R_2^2\sigma$，且 $m=m_2-m_1$，故

$$\sigma=\frac{m}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$$

$$I=-\frac{1}{4}\sigma\pi R_1^4+\frac{1}{4}\sigma\pi R_2^4=$$

$$\frac{\pi}{4}\frac{m}{\pi(R_2^2-R_1^2)}(R_2^4-R_1^4)=\frac{1}{4}m(R_1^2+R_2^2)$$

这一结果的正确性可由积分法予以验证.

$$I=\int r'^2\,\mathrm{d}m=\iint(r\cos\theta)^2\sigma r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\sigma\int_{R_1}^{R_2}r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\pi\sigma(R_2^4-R_1^4)$$

代入 $\sigma=\dfrac{m}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$，即得

$$I=\frac{1}{4}m(R_1^2+R_2^2) \tag{3}$$

可见上述的猜想式(2)是正确的. 对式(3)作一讨论是有趣的.

(1)$R_1\to R_2=R$ 时，圆环变为细圆环(一维)，得

$$I=\lim_{R_1\to R_2=R}\frac{1}{4}m(R_1^2+R_2^2)=\frac{1}{2}mR^2$$

(2)$R_1\to 0$，$R_2=R$ 时，圆环变为圆盘，得

$$I=\lim_{R_1\to 0,R_2=R}\frac{1}{4}m(R_1^2+R_2^2)=\frac{1}{4}mR^2$$

此法可称为补偿求和法，在计算某些形状复杂或被挖空的刚体转动惯量时往往会很方便.

1.2　同心球壳的转动惯量

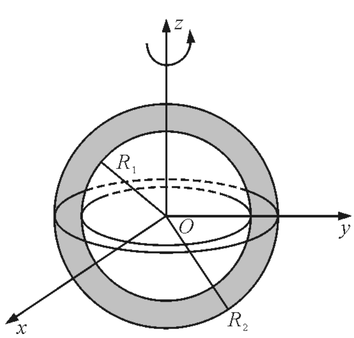

图 2　同心球壳的定轴转动

求匀质质量为 m，内外半径分别为 R_1 和 R_2 的同心球壳对其任一直径为定轴的转动惯量. 如图 2 所示，以 z 轴为定轴，采用补偿求和法.

设半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心球体(均为实心)的质量以及对定轴 z 轴转动惯量分别为 m_1 与 m_2 和 I_1 与 I_2. 因前者是虚构的，取负号. 则

$$I=-I_1+I_2=-\frac{2}{5}m_1R_1^{\ 2}+\frac{2}{5}m_2R_2^{\ 2} \tag{4}$$

注：质量为 m，半径为 R 的球体对任一直径的转动惯量是 $\frac{2}{5}mR^2$，根据

$$m_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3\rho$$

$$m_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3\rho$$

且 $m=m_2-m_1$，式中 ρ 为质量体密度，得

$$\rho=\frac{3m}{4\pi(R_2^3-R_1^3)}$$

将 m_1，m_2 及 ρ 代入(4)得

$$I=-\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)R_1^2+\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3\right)R_2^2=$$

$$\frac{2}{5}\rho\,\frac{4}{3}\pi(R_2^5-R_1^5)=\frac{2}{5}m\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^5} \tag{5}$$

即

$$I=\frac{2}{5}m\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^3} \tag{6}$$

为同心球壳对任一直径的转动惯量.

讨论此结果是有意义的.

(1)$R_1\to R_2=R$ 时

$$I=\lim_{R_1\to R_2=R}\frac{2}{5}m\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^3}=$$

$$\frac{2}{5}m\lim_{x\to R}\frac{R^5-x^5}{R^3-x^3}=\frac{2}{5}m\lim_{x\to R}\frac{-5x^4}{-3x^2}=\frac{2}{3}mR^2$$

此即为空球壳(二维)的转动惯量；

(2)$R_1\to 0$，$R_2=R$ 时

$$I=\lim_{R_1\to 0,R_2=R}\frac{2}{5}m\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^3}=$$

$$\frac{2}{5}m\frac{R^5-0^5}{R^3-0^3}=\frac{2}{5}mR^2$$

即为实心球体的转动惯量.(上述结果均与文献[1]118 页表 3-1 相关内容吻合)

1.3　同心圆柱壳的转动惯量

再举一例：一圆柱壳匀质，内外半径分别为 R_1 和 R_2，圆柱长 l. 求对过质心且与底面平行的转轴的转动惯量. 在柱坐标系下 (r,θ,z) 可求得底半径 R，长 l，质量 m 的圆柱体对过质心且与底面平行的转轴的转动惯量

$$I=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 \tag{7}$$

依补偿求和法，设两同心圆柱体质量分别为 m_1 和 m_2；半径分别为 R_1 和 R_2. 对该定轴转动惯量分别为 I_1 和 I_2，并由式(7)得

$$I=-I_1+I_2=-\left(\frac{1}{4}m_1R_1^2+\frac{1}{12}m_1l^2\right)+\left(\frac{1}{4}m_2R_2^2+\frac{1}{12}m_2l^2\right) \tag{8}$$

其中

$$m_1=\rho\pi R_1^2 l$$
$$m_2=\rho\pi R_2^2 l$$

代入式(8)

$$I=\frac{1}{4}(R_1^2+R_2^2)\rho\pi(R_2^2-R_1^2)l+\frac{1}{12}l^2\rho\pi(R_2^2-R_1^2)l \tag{9}$$

因 $m=m_2-m_1$，于是

$$m=\rho V=\rho\pi(R_2^2-R_1^2)l$$

代入式(9)得

$$I=\frac{1}{4}m(R_1^2+R_2^2)+\frac{1}{12}ml^2 \tag{10}$$

即为圆柱壳对过质心且与底面平行的转轴的转动惯量.

容易验证：

(1) 对于空柱壳，$R_1\rightarrow R_2=R$，有

$$I=\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 \tag{11}$$

(2) 对于实心圆柱，$R_1\rightarrow 0$，$R_2=R$，有

$$I=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 \tag{12}$$

2　补偿求和法的数学表述及在工程力学上的应用

2.1　补偿求和法的数学表述

通过以上分析和论证，我们可将普通物理学中的刚体转动惯量组合定理加以改造. 组合定理指出：刚体由 n 部分组成时，第 i 部分对定轴转动惯量为 I_i，则刚体对该定轴转动惯量可以写成

$$I=\sum_{i=1}^{n}I_i \tag{13}$$

刚体转动惯量的补偿求和法则如下.

刚体由 n 部分组成时，第 i 部分对定轴转动惯量大小为 I_i，正负取决于该部分自身，即如果该部分质量是实际存在的(real)，则取“+”号；如果是虚构的(imaginary)，则取“—”号. 刚体对定轴转动惯量可写为

$$I=\sum_{i=1}^{n}(\pm)I_i \tag{14}$$

利用补偿求和法则有时候可以很方便快捷求出某些复杂刚体对定轴的转动惯量(特别是组合定理不能直接使用时)，下面仅举一例作为此法之应用.

2.2　补偿求和法在工程力学上的应用

有一模具，由柄(线密度为 λ)和与柄相连的薄圆盘(面密度为 σ)组成，柄长 l，圆盘半径 R_2，中心被挖去半径 R_1 的圆. 且四周亦被对称地挖去 4 个小正方形，边长为 a，其与小圆边沿相距均为 b，如图 3 所示. 求模具对以 O 为心，且垂直于盘面的转轴的转动惯量(图中空白处均表示被挖空部分).

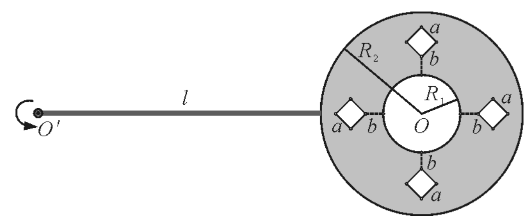

图 3　模具的定轴转动

解析：分析得知，模具可看成由 7 个部分组成. 即长为 l 的柄(m_1)，半径为 R_2 的大圆盘(m_2)，半径为 R_1 的小圆盘(m_3)，4 个小正方形(m_4，m_5，m_6，m_7). (除前两个部分，其余 5 部分全部为虚构的) 设以上各部分对以 O 为心，且垂直于盘面的转轴的转动惯量的大小分别为 I_1，I_2，I_3，I_4，I_5，I_6，I_7.

根据补偿求和法则，模具对同一转轴转动惯量

I 满足

$$I=\sum_{i=1}^{7}(\pm)I_i=I_1+I_2-I_3-I_4-I_5-I_6-I_7 \tag{15}$$

利用刚体定轴转动的平行轴定理易得

$$I_1=\frac{1}{3}m_1l^2=\frac{1}{3}\lambda\, l\cdot l^2=\frac{1}{3}\lambda\, l^3$$

$$I_2=\frac{1}{2}m_2R_2^2+m_2d_2^2=\frac{1}{2}\sigma\pi R_2^4+\sigma\pi R_2^2\,(l+R_2)^2$$

$$I_3=\frac{1}{2}m_3R_1^2+m_3d_3^2=\frac{1}{2}\sigma\pi R_1^4+\sigma\pi R_1^2\,(l+R_2)^2$$

$$I_4=\frac{1}{6}m_4a^2+m_4d_4^2=\frac{1}{6}\sigma a^4+\sigma a^2\left[\left(R_2-R_1-b-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)+l\right]^2$$

$$I_5=\frac{1}{6}\sigma a^4+\sigma a^2\left[\left(R_2+R_1+b+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)+l\right]^2$$

$$I_6=I_7=\frac{1}{6}\sigma a^4+\sigma a^2\left[\left(R_1+b+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+(l+R_2)^2\right]$$

故模具对过 O 点且垂直于圆盘面的转轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{3}\lambda l^3+\left\{\frac{1}{2}\sigma\pi R_2^4+\sigma\pi R_2^2\,(l+R_2)^2\right\}-\\&\left\{\frac{1}{2}\sigma\pi R_1^4+\sigma\pi R_1^2\,(l+R_2)^2\right\}-\\&\left\{\frac{1}{6}\sigma a^4+\sigma a^2\left[\left(R_2-R_1-b-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)+l\right]^2\right\}-\\&\left\{\frac{1}{6}\sigma a^4+\sigma a^2\left[\left(R_2+R_1+b+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)+l\right]^2\right\}-\\&2\left\{\frac{1}{6}\sigma a^4+\sigma a^2\left[\left(R_1+b+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+(l+R_2)^2\right]\right\}\end{aligned}$$

总结：以上一些例子表明求解某些复杂结构的刚体对定轴转动惯量时，常常将刚体分解成 n 个部分，允许某些部分是虚构的，分别求出每一部分对定轴转动惯量，再利用补偿求和法则 $I=\sum_{i=1}^{n}(\pm)I_i$ 即可简便地求得刚体对该轴的转动惯量，这样做往往会问题大大简化，也能加深我们对转动惯量这一概念的认识.

参考文献

1 程守洙，江之永. 普通物理学.(第 6 版). 北京：高等教育出版社，2006. 118

The General Solution on Fixed Axis Moment Inertia of Rigid Body by Compensation Method

Feng Jindi

(Science and Technical Department, Xinyang Normal University Huarui College, Xinyang, Henan 464000)

Abstract: We obtain a new conclusion about solution of moment of inertia about a fixed axis by guess and proof in this article, from the conclusion the combination theorem of moment of inertia is generalized. It will be specially useful when we frequently confront solving moment of inertia of some complicated－shaped rigid body on engineering mechanics. In the end we solve a problem for example by this conclusion to show its advantage of simpleness, convenience and speciality.

Key words: moment inertia; principle of superposition; compensation summation method