

## 对“平抛运动的又一规律”的补充

王建忠

(江苏省启东中学 江苏南通 226200)

(收稿日期:2015-12-27)

**摘要:**证明平抛运动的质点,在运动过程中,相对抛出点的位移与速度的夹角存在极大值,并求出达到这一最大夹角所用的时间.

**关键词:**平抛运动 规律 位移与速度的夹角

本刊2015年第12期,刊登了“平抛运动的又一规律”<sup>[1]</sup>一文,文章介绍了作者发现的平抛运动的又一个规律,“任何做平抛运动或类平抛运动的质点,在运动过程中,相对抛出点的位移与速度的夹角存在极大值,该角正弦的最大值为 $\frac{1}{3}$ ;达到这一最大

值所需时间 $t = \frac{\sqrt{2}v_0}{g}$ ( $v_0$ 为质点抛出时的初速度).”

笔者为该文定性分析和定量计算相结合处理问题的方法点赞,对文章作者发现规律的能力,将物理问题与图形相结合、变抽象为形象解决问题的能力心生敬意.为证明这一“规律”的正确性,下面给出另一种证明方法,作为对文献[1]的补充,请同行和专家指正.

如图1,以抛出点 $O$ 为原点,初速度 $v_0$ 方向为 $x$ 轴正方向,竖直向下为 $y$ 轴的正方向建立坐标系.经过一段时间 $t$ ,质点运动到 $A(x,y)$ 点,此时质点的速度 $v$ 与 $x$ 轴的夹角为 $\alpha$ ,其相对抛出点的位移 $OA$ 与 $x$ 轴的夹角为 $\varphi$ ,相对抛出点的位移与速度的夹角为 $\theta$ .显然 $\alpha, \varphi, \theta$ 均在第一象限.

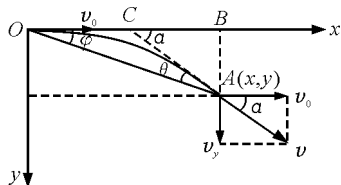


图1

由图1可知

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_0} \quad (1)$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (2)$$

由平抛运动规律,有

$$y = \frac{1}{2}v_y t \quad (3)$$

$$x = v_0 t \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入式(2),得

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{v_y}{2v_0} \quad (5)$$

比较式(1)、(5),得

$$\tan \alpha = 2 \tan \varphi \quad (6)$$

式(6)也是平抛运动的一个规律.由几何知识,有

$$\theta = \alpha - \varphi$$

利用三角函数的和差化积公式,有

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \varphi) = \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{1 + \tan \alpha \tan \varphi} \quad (7)$$

式(6)代入式(7),并整理可得

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \varphi + 2 \tan \varphi} \quad (8)$$

由基本不等式知识可知,当 $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\cot \varphi +$

$2 \tan \varphi$ 有最小值 $2\sqrt{2}$ ,即 $\tan \theta$ 有最大值 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,则

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

而

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{gt}{v_0} = 2 \tan \varphi$$



# 关于恒速物体间接做功的结论及应用

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2015-10-12)

**摘要:**利用多种方法推导了恒速物体在发射质点过程中对质点间接做功的公式及有关结论,探究了不同参考系中某个力做的功、某个物体做的功,以及媒介物体对加速物体做的功或提供的能量的计算方法,并对相关物理问题从多角度进行解答.

**关键词:**恒速物体 参考系 做功 能量

在恒速运动的物体上通过间接物体向前或向后发射质点,由于质点与恒速物体通过间接物体相互作用,因此在地面参考系中对变速质点应用动能定理列方程时,要考虑恒速物体对变速质点间接做的功,称为“借物传功”,对于这种功的大小有确定的关系式,用来解答有关的物理问题可化繁为简,拓展思路.

## 1 结论推导

现以质量相差悬殊的两个平动物体相互作用后分离的情况为例,来推导出恒速物体发射质点做功多少的一个结论.

**【问题】**在光滑水平面上,质量为  $M$  的平板车,以速度  $v_0$  做匀速直线运动,车上的发射装置沿水平方向向前发射一个质量为  $m$  的小球,使之获得速度  $v$ ,若  $M \gg m$ ,求发射小球时平板车对小球做的功.

即 
$$\frac{gt}{v_0} = \sqrt{2}$$

得 
$$t = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} \quad (10)$$

如果是类平抛运动,将  $g$  换为等效重力加速度,结论同样成立.

与文献[1]的解法殊途同归,可见文献[1]发现的平抛运动的这一“规律”是正确的.提醒我们命制有关平抛(类平抛)运动的习题时,所设置的条件须符合这一“规律”,否则会违背科学的自洽性,混乱学生的知识结构,误导他们的创造性思维.启发我们,

**解析:**对于在平板车上向前发射小球的过程,由于  $M \gg m$ ,则可认为平板车以恒速  $v_0$  运动.在发射小球时为了维持平板车恒速,需由系统之外的力对平板车提供能量  $\Delta E$ .设平板车发生的位移为  $s_0$ ,则外力对平板车做的功为  $Fs_0 = \Delta E$ ,由于平板车受力平衡,则外力  $F$  与弹簧对平板车的作用力  $f$  大小相等,方向相反;由于弹簧质量为零,那么弹簧对小球的作用力  $f'$  与  $f$  大小相等,方向相反.因此外力  $F$  与弹簧对小球的作用力  $f'$  大小相等,方向相同,即  $F = f'$ .对小球由动量定理有  $f't = m(v - v_0)$ ,则  $Ft = m(v - v_0)$ ,而  $s_0 = v_0 t$ ,所以维持平板车匀速运动所需的能量为

$$W_0 = Fs_0 = m(v - v_0)v_0 = muv_0$$

当以平板车为参考系时,车对小球不做功;当以地面为参考系时,维持车匀速运动的外力对车做的功为  $W_0$ ,弹簧释放的弹性势能为  $Q$ ,因此车和小球

一些非常熟悉的物理现象背后,还有隐藏的规律有待我们去发现.只要我们不断地学习研究,多思考多总结,普通教师也可以成为规律的发现者、知识的创造者.若将这一“规律”的证明改编成习题,供学生练习,既可以使学生加深对平抛运动规律的理解,培养学生思维的深刻性,一题多解,培养学生思维的发散性;又可以让学学生掌握数形结合处理问题的思路和方法,提高应用数学解决物理问题的能力.

## 参考文献

- 1 马俊坡.平抛运动的又一规律.物理通报,2015(12):27~29