均匀杆在什么位置离开竖直墙面

姜付锦

(武汉市黄陂一中 湖北 武汉 430300)

(收稿日期:2015-10-29)

摘 要:先以杆的质心 C 为研究对象并结合机械能守恒定律求出杆转动的角速度与夹角 θ 的关系,接着用牛顿第二定律分析了匀质杆脱离墙面的条件,最后求得匀质杆脱离墙面的角度.通过研究发现,这个角与杆的长度无关,理论上有 4 个解,其中有两个虚数解,一个解为零,还有一个实数解;当两个小球质量相同时脱离角度为 $\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right)$.

关键词:转动惯量 机械能守恒定律 脱离条件

1 题目

如图 1 所示,小球 A 和 B 的质量分别为 m_1,m_2,两球之间用一长为 L,质量为 m 均匀分布的杆连接,杆放在光滑的水平面和光滑的竖直墙壁之间.开始时杆与竖直墙面的夹角为 θ_0,某一时刻释放杆,试分析当小球 A 脱离墙壁时杆与墙壁的夹角.

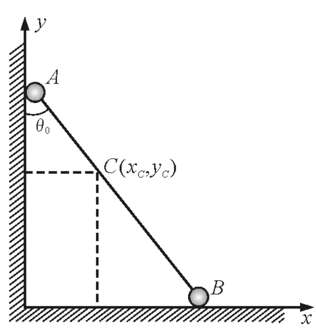

图 1

2 杆转动角速度的求解

某一时刻杆与墙壁成 θ 角,则系统的质心位置坐标为(x_C,y_C),由质心的定义式可知

$$x_C=\frac{m\dfrac{L}{2}\sin\theta+m_2L\sin\theta}{m_1+m_2+m}$$

$$y_C=\frac{m\dfrac{L}{2}\cos\theta+m_1L\cos\theta}{m_1+m_2+m}$$

整理后得

$$x_C=\frac{L(m+2m_2)\sin\theta}{2(m_1+m_2+m)}$$

$$y_C=\frac{L(m+2m_1)\cos\theta}{2(m_1+m_2+m)}$$

对位置坐标求时间 t 的一阶导数得质心的两个分速度大小

$$\dot{x}_C=\frac{L(m+2m_2)\cos\theta\cdot\dot{\theta}}{2(m_1+m_2+m)}$$

$$\dot{y}_C=\frac{L(m+2m_1)(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}}{2(m_1+m_2+m)}$$

对位置坐标求时间 t 的二阶导数得质心的两个分加速大小

$$\ddot{x}_C=\frac{L(m+2m_2)[\cos\theta\cdot\ddot{\theta}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2]}{2(m_1+m_2+m)}$$

$$\ddot{y}_C=\frac{L(m+2m_1)[(-\sin\theta)\cdot\ddot{\theta}-\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2]}{2(m_1+m_2+m)}$$

由系统机械能守恒可知

$$mg\,\frac{L}{2}(\cos\theta_0-\cos\theta)+m_1gL(\cos\theta_0-\cos\theta)=$$

$$\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$

式中 $J_C=aL^2$(a 为某一定值)为系统相对于质心的转动惯量,则得

$$\dot{\theta}^2=4(2m_1+m)(m_1+m_2+m)(\cos\theta_0-\cos\theta)$$
$$g\{L[4(m_2-m_1)(m_1+m_2+m)\cos^2\theta+$$
$$(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]\}^{-1}$$

两边对时间求导得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=4(2m_1+m)(m_1+m_2+m)g\sin\theta[-4(m_2-$$
$$m_1)(m_1+m_2+m)\cos^2\theta+8(m_2-m_1)(m_1+m_2+$$
$$m)\cos\theta_0\cos\theta+(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]\cdot$$
$$\dot{\theta}\{L[4(m_2-m_1)(m_1+m_2+m)\cos^2\theta+$$
$$(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]^2\}^{-1}$$

进一步整理得

$$\ddot{\theta}=2(2m_1+m)(m_1+m_2+m)g\sin\theta[-4(m_2-$$

$$m_1)(m_1+m_2+m)\cos^2\theta+8(m_2-m_1)(m_1+m_2+m)\cos\theta_0\cos\theta+(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]\{L[4(m_2-m_1)(m_1+m_2+m)\cos^2\theta+(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]^2\}^{-1}$$

3　系统的转动惯量的计算[1]

系统对过质心垂直纸面的轴的转动惯量为

$$J_C=m_1\left[\frac{(m+2m_2)L}{2(m+m_1+m_2)}\right]^2+m_2\left[\frac{(m+2m_1)L}{2(m+m_1+m_2)}\right]^2+\int_0^{\frac{(m+2m_1)L}{2(m+m_1+m_2)}}\frac{m}{L}x^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{(m+2m_2)L}{2(m+m_1+m_2)}}\frac{m}{L}x^2\mathrm{d}x$$

整理后得

$$J_C=m_1\left[\frac{(m+2m_2)L}{2(m+m_1+m_2)}\right]^2+m_2\left[\frac{(m+2m_1)L}{2(m+m_1+m_2)}\right]^2+\frac{m}{L}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{(m+2m_2)L}{2(m+m_1+m_2)}\right]^3+\frac{1}{3}\left[\frac{(m+2m_1)L}{2(m+m_1+m_2)}\right]^3\right\}$$

4　小球 A 脱离墙面的条件

如图 2 所示，系统所受的外力有重力、地面支持力和墙面的弹力，墙面的弹力的方向水平向右.

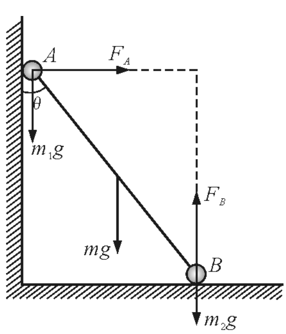

图 2　系统的受力图

$$(m_1+m_2+m)\ddot{x}_C=F_A$$

$$(m_1+m_2+m)\ddot{y}_C=F_B-(m_1+m_2+m)g$$

当 $F_A=0$ 时，小球 A 脱离墙面，则有

$$\ddot{x}_C=\frac{L(m+2m_2)[\cos\theta\cdot\ddot{\theta}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2]}{2(m_1+m_2+m)}=0$$

代数值后整理得

$$\{4(m_2-m_1)(m_1+m_2+m)\cos^3\theta+3[(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]\cos\theta-2[(m+2m_1)^2+4(m_1+m_2+m)a]\cos\theta_0\}\cdot\sin\theta=0$$

式中

$$a=m_1\left[\frac{(m+2m_2)}{2(m+m_1+m_2)}\right]^2+m_2\left[\frac{(m+2m_1)}{2(m+m_1+m_2)}\right]^2+m\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{(m+2m_2)}{2(m+m_1+m_2)}\right]^3+\frac{1}{3}\left[\frac{(m+2m_1)}{2(m+m_1+m_2)}\right]^3\right\}$$

5　杆与墙壁夹角的求解

这个方程有一个特解 $\sin\theta=0$，即 $\theta=0$，由题意可知这个解无意义舍去.

（1）当 $m_1=m_2$ 时，$\cos\theta=\frac{2}{3}\cos\theta_0$ 这是 1 个特解，与没有两个小球的匀质杆脱离角度相同[2]；

（2）当 $m_1\neq m_2$ 时，$\cos\theta$ 在理论上有 3 个解，其中有两个解是虚数，另外 1 个实数解，由于这个方程非常复杂，很难求出解析解，故本文给出以下数值模拟解：

设 $m_1=2$ kg，$m_2=4$ kg，$m=1$ kg，初始角度为 θ_0，则脱离时的角度满足

$$\cos\theta=\frac{1}{6}\{252\cos(\theta_0)+42[42+36\cos(\theta_0)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}-\frac{7}{\{252\cos(\theta_0)+42[42+36\cos(\theta_0)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}}$$

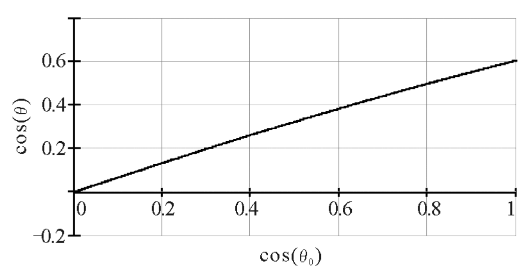

图 3　当系统质量一定时，脱离角度与初始角度的关系

由图 3 可知，初始时角度的 $\cos(\theta_0)$ 越大，脱离时角度的 $\cos(\theta)$ 越大；当 $\theta_0=0$ 时，$\cos(\theta)=0.604$，约为52.8°. 若系统质量是其他值时，则只需将以上的程序略作修改即可，限于篇幅这里不再讨论.

参 考 文 献

1　周衍柏. 理论力学教程(第 2 版). 北京：高等教育出版社，1985. 128 ～ 131

2　郑永令，贾起民. 普通物理学教程丛书 力学(第 1 版). 上海：复旦大学出版社，1989. 280 ～ 282