竞赛与
物理专题研修

物块在有摩擦竖直圆轨道上的滑动速度*

陈龙法

（石狮市第一中学　福建 泉州　362700）

（收稿日期：2015-12-04）

摘　要：研究物块在有摩擦竖直圆平面内轨道上滑动时，用动力学方法列出的非线性微分方程，通常含时间变量，求解困难. 经过系列变换消除时间变量后，得到了任意位置物块速度的一般解，并获得特殊值的验证.

关键词：摩擦　竖直平面内圆轨道　消除时间变量　滑动速度

如图 1 所示，$\frac{1}{4}$ 圆轨道固定在竖直平面内，圆轨道的半径为 r. 一个质量为 m 的物块，自轨道最高点 A 由静止开始释放，物块与轨道之间的动摩擦因数为 μ，求物块沿 $\frac{1}{4}$ 圆轨道滑至最低点 B 时的速度大小.

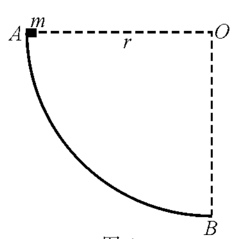

图 1

如图 2，令物块滑动到 C 点时速度大小为 v，OC 连线与水平线夹角为 θ，设滑动摩擦力 f 与轨道对滑块的弹力 N 成正比，即

$$f=\mu N \tag{1}$$

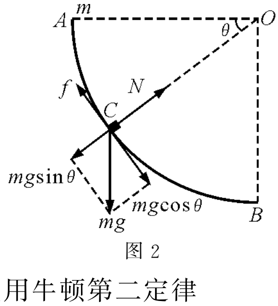

图 2

在径向应用牛顿第二定律

$$N-mg\sin\theta=m\frac{v^2}{r} \tag{2}$$

在切向应用牛顿第二定律

$$mg\cos\theta-f=ma_t \tag{3}$$

即

$$a_t=g\cos\theta-\mu\left(g\sin\theta+\frac{v^2}{r}\right) \tag{4}$$

切向速度 v 跟角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ 的关系为

$$v=r\frac{d\theta}{dt}$$

切向加速度 a_t 跟角加速度 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ 的关系为

$$a_t=r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

将这些关系式代入式(4)，得

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}=g(\cos\theta-\mu\sin\theta)-\mu\frac{1}{r}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

将上式两边同除以 r 得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\mu\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{g}{r}\cos\theta+\mu\frac{g}{r}\sin\theta=0 \tag{5}$$

这是 θ 对 t 的非线性微分方程，难以直接求解. 下面用消除时间变量的方法来简化方程.

因

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d\omega}{d\theta}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

代入式(5)得

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta}+\mu\omega^2-\frac{g}{r}\cos\theta+\mu\frac{g}{r}\sin\theta=0 \tag{6}$$

此方程中的 ω 是作为 θ 的函数，并且有

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta}=\frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\theta}$$

* 福建省教育科学“十二五”规划 2015 年度常规课题“高中物理教材二次开发案例研究”，项目编号：FJJK15－454

作者简介：陈龙法（1961－　），男，中教高级，主要从事高中物理教学和研究.

于是

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\omega^2}{2}\right)}{\mathrm{d}\theta}+\mu\omega^2-\frac{g}{r}\cos\theta+\mu\frac{g}{r}\sin\theta=0$$

令 $\dfrac{g}{r}=p$，$y=\omega^2$，对上式作变量代换，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+2\mu y=2(p\cos\theta-\mu p\sin\theta)\tag{7}$$

两边乘以积分因子 $\mathrm{e}^{2\mu\theta}$，由于

$$\mathrm{e}^{2\mu\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+2\mu y\right)=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2\mu\theta}y)}{\mathrm{d}\theta}$$

所以式(7) 可以化为

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2\mu\theta}y)}{\mathrm{d}\theta}=2\mathrm{e}^{2\mu\theta}(p\cos\theta-\mu p\sin\theta)$$

即

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2\mu\theta}y)=2\mathrm{e}^{2\mu\theta}(p\cos\theta-\mu p\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

两边从 0 到 θ 积分

$$\int_0^\theta \mathrm{d}(\mathrm{e}^{2\mu\theta}y)=\int_0^\theta 2\mathrm{e}^{2\mu\theta}(p\cos\theta-\mu p\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

因物块初速度为零，即 $\theta=0$ 时，$y=\omega^2=0$

所以

$$\mathrm{e}^{2\mu\theta}y=\int_0^\theta 2\mathrm{e}^{2\mu\theta}p\cos\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^\theta 2\mathrm{e}^{2\mu\theta}\mu p\sin\theta\mathrm{d}\theta\tag{8}$$

应用积分公式

$$\int_0^\theta \mathrm{e}^{2\mu\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\left.\frac{\mathrm{e}^{2\mu\theta}(2\mu\sin\theta-\cos\theta)}{4\mu^2+1}\right|_0^\theta$$

和

$$\int_0^\theta \mathrm{e}^{2\mu\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\left.\frac{\mathrm{e}^{2\mu\theta}(2\mu\cos\theta+\sin\theta)}{4\mu^2+1}\right|_0^\theta$$

于是，式(8) 变为

$$\mathrm{e}^{2\mu\theta}y=2p\left[\frac{\mathrm{e}^{2\mu\theta}(2\mu\cos\theta+\sin\theta)-2\mu}{4\mu^2+1}-\mu\frac{\mathrm{e}^{2\mu\theta}(2\mu\sin\theta-\cos\theta)+1}{4\mu^2+1}\right]$$

化简为

$$y=\frac{2p}{4\mu^2+1}(3\mu\cos\theta+\sin\theta-2\mu^2\sin\theta-3\mu\mathrm{e}^{-2\mu\theta})\tag{9}$$

因为 $v=r\omega$，$p=\dfrac{g}{r}$，$y=\omega^2$. 所以，物块速度作为 θ 函数的一般解为

$$v=\left[\frac{2gr}{4\mu^2+1}(3\mu\cos\theta+\sin\theta-2\mu^2\sin\theta-3\mu\mathrm{e}^{-2\mu\theta})\right]^{\frac{1}{2}}\tag{10}$$

以 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 代入，得到物块在最低点 B 的速度大小为

$$v_B=\left[\frac{2gr}{4\mu^2+1}(1-2\mu^2-3\mu\mathrm{e}^{-\mu\pi})\right]^{\frac{1}{2}}\tag{11}$$

在没有摩擦($\mu=0$)的极限情况下，$v_B=(2gr)^{\frac{1}{2}}$.

(上接第 57 页)

1) 牛顿第一定律不是实验结论，而是实验基础上的科学推理.

2) 定律所指的“一切物体”包含两类：原本静止的和原本运动的物体.

3) 力是改变物体运动状态的原因.

4) 惯性.

(2) 平衡力

1) 概念：一个物体受到两个或几个力的作用而保持运动状态不变，则这几个力互相平衡.

2) 二力平衡的条件：一个物体受到两个力的作用，如果它们大小相等、方向相反且作用在同一条直线上，则这两个力互相平衡.

3) 应用.

这是学生可以总结出来的知识罗列. 那么在教学过程中教师在按照学生回答“牛顿第一定律”以及“平衡力”知识过程中，分步骤板书成以下内容：

$$\left.\begin{array}{l}\text{不受力}\\ \\ \text{平衡力}\end{array}\right\}\text{合力为零}\Longleftrightarrow\begin{array}{c}\text{运动状}\\ \text{态不变}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{静止}\\ \\ \text{匀速直线}\end{array}\right.$$

形成关系之后再让学生反向思考，可得：

$$\boxed{\text{合力不为零}}\Longleftrightarrow\boxed{\text{运动状态改变}}$$

章节内涵：这个关系式就是“运动和力”的关系，也是“牛顿第二定律”的定性描述. 理解了这一内在联系，就可以深层次理解并内化有关“运动和力”的关系，也为高中学习“牛顿第二定律”打下了良好的基础.

综上所述，每个过程目标的实现，都需要教师在课程进行时有前瞻意识，要设计好各个操作环节. 而前瞻意识，是在不断积累的教学经验中逐渐形成的，也是经常性的有效反思的结晶.