

雨滴下落“紫外灾难”的消除

——对雨滴下落加速度问题的辨析

陈显盈 仇焕敏

(温州中学 浙江 温州 325000)

(收稿日期:2015-09-17)

摘要:对于雨滴在下落过程中,当采用空气阻力 $f = k_1 v$ 时,其 $a-t$ 图像变化率一直减小,只适用于速度较小情况;而当采用阻力 $f = k_2 v^2$ 时,其 $a-t$ 图像变化率先增大后减小,只适用于速度较大情况. 只有当采用阻力 $f = k_1 v + k_2 v^2$ 时,其 $a-t$ 图像变化率一直减小,同时适用于速度较小和较大情况,比前两种理想化模型更加符合实际情况.

关键词:雨滴 下落 $a-t$ 图像 修正

1 提出问题

人教版教材高中物理·必修1中第三章第3节摩擦力中的“科学漫步”专门介绍了流体的阻力,指出雨滴在空气中下落,速度越来越大,所受空气阻力也越大. 因此,许多辅导书会出现以下两道有关雨滴下落的试题.

【例1】雨滴在空中下落,受到的空气阻力与速度大小有关. 假设空气阻力大小与速度大小成正比,则下列图像能大致反映雨滴下降过程中加速度大小 a 与时间 t 及速度 v 关系的有

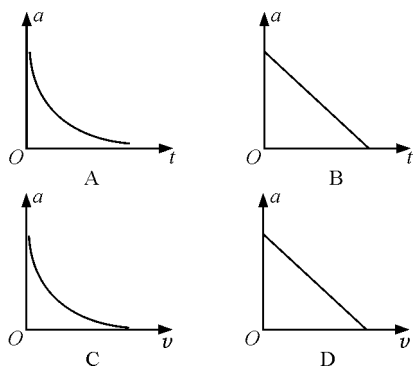


图1

【例2】若已知雨滴在空中运动时所受空气阻力 $f = kr^2 v^2$, 其中 k 为比例系数, r 为雨滴半径, v 为运

动速率. $t=0$ 时,雨滴由静止开始下落,加速度用 a 表示. 落地前雨滴已做匀速运动,速率为 v_0 . 下列图像中正确的是

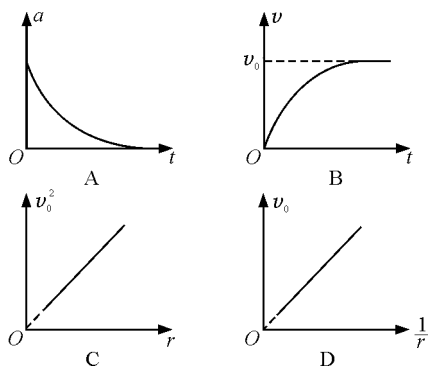


图2

思考问题:两道试题的参考答案分别为AD和ABC,许多文章^[1,2]对例题2中选项A提出质疑,通过理论推导可知其加速度变化率并不是一直变小,而是先增大再减小的[见图4(b)],该说法是否合理呢? 另外,两道题目情景都是雨滴下落,但其阻力公式并不相同,其实这分别是速度较小与速度较大两种实际情况抽象出来的理想化模型,那么能否存在一个同时符合速度较小与较大两种情况的模型或图像呢? 下面,笔者通过理论推导公式并绘制图像,从而分析雨滴下落加速度随时间变化的规律.

2 分析问题

2.1 两种情况分析

其实,在空气中下落的过程中,当速度 v 较小时,雨滴受到空气阻力与下落的速度成正比,即

$$f = kv$$

当速度较大时,雨滴受到空气阻力与下落的速度二次方成正比,即

$$f = kv^2$$

(1) 当速度 v 较小时

$$f = kv$$

$$mg - kv = ma$$

得

$$a = g - \frac{k}{m}v$$

可推导得

$$a = ge^{-\frac{k}{m}t}$$

取 $\frac{k}{m} = 1$ 并利用几何画板绘制其 $a-t$ 图像见图 3. 可见,其加速度随时间的增大而呈指数衰减,其变化率一直减小,最后趋向零.

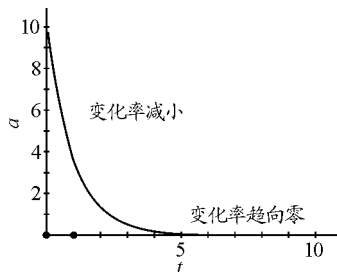


图 3

(2) 当速度 v 较大时

$$f = kv^2$$

$$mg - kv^2 = ma$$

得

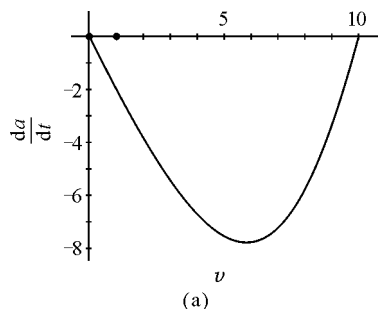
$$a = g - \frac{k}{m}v^2$$

可推导得

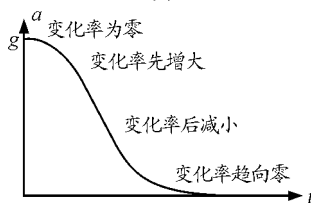
$$\frac{da}{dt} = -\frac{2k}{m} \left(gv - \frac{k}{m}v^3 \right)$$

取 $\frac{k}{m} = 0.1$, 可得其 $\frac{da}{dt} - v$ 图像见图 4(a). 可见,加速

度的变化率从零先增大后又减小到零. 根据该结果,可大致绘制其 $a-t$ 图像如图 4(b) 所示. 因此,参考文献[1]和[2]的作者提出质疑:例题 2 中的 A 选项图像(图 2)并不完全正确.



(a)

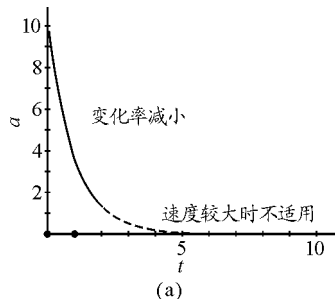


(b)

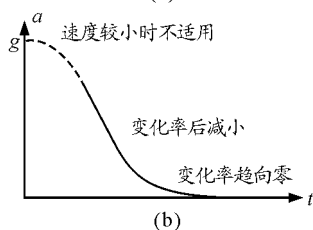
图 4

2.2 深入思考

从严格意义上讲,其实图 3 和图 4(b) 中的曲线并不非常标准. 对于图 3, 因为曲线只适用于速度较小的情况, 后来速度已较大, 后半段可能会出现偏差, 应该用虚线表示. 同理, 对于图 4(b), 因为该曲线只适用于速度较大的情况, 而刚开始速度为零, 也会出现明显偏差, 也应该用虚线表示. 可见, 两种情况分别用图 5(a) 和图 5(b) 表示更加标准.



(a)



(b)

图 5

那么,对于雨滴下落问题能否绘制出一个同时符合速度较小和较大的两种情况的图像呢?其大致图像可以将两条曲线相结合,即用图5(a)前段部分加上图5(b)后段部分.但是,该方法可能会出现以下两种情况:第一种情况,变化率一直减小;第二种情况,变化率先变小,再变大后又变小.下面建立模型推导公式并描绘其大致曲线,从而判断哪种情况正确.

3 解决问题

3.1 构建模型

其实,雨滴在下落过程中主要受两部分阻力:黏性阻力和压差阻力.当速度较小时,黏性阻力起主导阻力,满足 $f=k_1v$;当速度较大时,压差阻力起主导阻力,满足 $f=k_2v^2$.因此,可假设雨滴下落过程中所受的阻力 $f=k_1v+k_2v^2$,当 v 较小时,满足 $k_1v \gg k_2v^2$, $f \approx k_1v$, k_1v 作为主导阻力;当 v 很大时,满足 $k_1v \ll k_2v^2$, $f \approx k_2v^2$, k_2v^2 作为主导阻力.因此,不管 v 多大,都可以假设 $f=k_1v+k_2v^2$.

3.2 绘制图像

此时

$$mg - k_1v - k_2v^2 = ma$$

得

$$a = \frac{mg - k_1v - k_2v^2}{m}$$

可推导得

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{m^2}(k_1 + 2k_2v)(mg - k_1v - k_2v^2)$$

令

$$\frac{k_1}{m} = 1.5$$

$$\frac{k_2}{m} = 0.1$$

可得

$$\frac{da}{dt} = -(1.5 + 0.2v)(9.8 - 1.5v - 0.1v^2)$$

根据几何画板绘制其 $\frac{da}{dt} - v$ 图像如图6(a)所示.可见, $\frac{da}{dt}$ 为负数,其绝对值一直减小,最后为零;

并不是先变小、再变大后又变小的情况.因此,可大致绘制出 $a-t$ 图像如图6(b)所示.

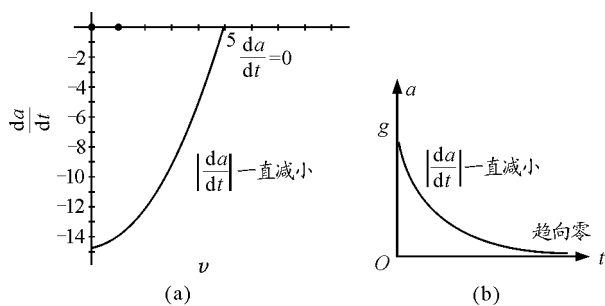


图6

4 总结

总之,对于雨滴下落过程中,当我们采用空气阻力 $f=k_1v$ 时,其 $a-t$ 图像变化率一直减小,只适用于速度较小情况,在速度较大时与实际情况存在偏差;而当采用阻力 $f=k_2v^2$ 时,其 $a-t$ 图像变化率先增大后减小,只适用于速度较大情况,在速度较小时与实际情况存在明显偏差.只有当采用阻力 $f=k_1v+k_2v^2$ 时,其 $a-t$ 图像变化率一直减小,同时适用于速度较小和较大情况,比前两种理想化模型更加符合实际情况.

另外,我们不难联想到科学发展史中的大家熟知的“紫外灾难”.当时,对于黑体辐射能量按波长分布的维恩公式或图像在短波波段与实验符合得很好,但在长波波段与实验有明显的偏离.而另一个瑞利-金斯公式或图像在长波或高温情况下,同实验结果相符,但在短波范围,能量密度则迅速地单调上升,与实验结果矛盾,这个科学谬误就是黑体辐射的“紫外灾难”.后来,在进一步探索更好的辐射公式的过程中,普朗克建立了与所有的实验都符合的辐射量子理论.可见,本文对雨滴下落加速度随时间变化图像的研究与修正过程,可类比为对雨滴下落的“紫外灾难”的研究与修正.

参考文献

- 1 顾俊琪.雨滴下落过程中的图像究竟如何.物理通报, 2014(7):110
- 2 柏露枝,等.雨滴下落加速度图像研究.物理教师, 2015(4):90