“等时圆”及其应用

王存贵

（秦皇岛市第一中学　河北 秦皇岛　066006）

（收稿日期：2016-01-06）

摘　要：“等时圆”是高中物理的一个重要模型，本文先研究了“等时圆”模型的建立，接着让学生们体会如何自己构造“等时圆”，以加深对“等时圆”的理解．

关键词：等时圆　最高点　最低点　光滑

学生在学习到牛顿第二定律这一部分内容时，常常会碰到“等时圆”这一类型的题目，由于初学会对“等时圆”的认识不够深刻，经常会用错，可见“等时圆”在高中阶段是一种比较难的物理模型．所以我们有必要强化对“等时圆”基本规律的理解，这样才有利于提高同学们的解题能力，开阔视野，下面笔者就先介绍一下等时圆模型．

1　等时圆模型的建立

【例 1】 如图 1 所示，ad，bd，cd 是竖直面内 3 根固定的光滑细杆，a，b，c，d 位于同一圆周上，a 点为圆周的最高点，d 点为最低点，每根杆上都套着一个小滑环（图中未画出），3 个滑环分别从 a，b，c 处释放（初速为零），用 t_1，t_2，t_3 依次表示各滑环到达 d 所用的时间，则

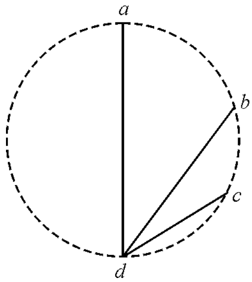

图 1

A. $t_1 < t_2 < t_3$　　B. $t_1 > t_2 > t_3$

C. $t_3 > t_1 > t_2$　　D. $t_1 = t_2 = t_3$

解析：设圆环半径为 R，杆与水平面的夹角为 α，则杆长可表示 $2R\sin\alpha$，根据牛顿第二定律

$$mg\sin\alpha = ma$$

$$2R\sin\alpha = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha$$

可得 $t=\sqrt{\dfrac{4R}{g}}$，可见 t 与 α 无关，故下滑时间相同．答案为选项 D．

总结 1：物体沿着位于同一竖直圆上的所有光滑弦的顶端由静止下滑到圆的最低点，所用时间相同，均为 $t=\sqrt{\dfrac{4R}{g}}$．运动时间与弦的倾角、长短无关．

【练习 1】

如图 2 所示，ab，ac，ad 是竖直面内 3 根固定的光滑细杆，a，b，c，d 位于同一圆周上，a 点为圆周的最高点，d 点为最低点，每根杆上都套着一个小滑环（图中未画出），3 个滑环均从 a 处释放（初速为零），用 t_1，t_2，t_3 依次表示各滑环到达 b，c，d 所用的时间，则

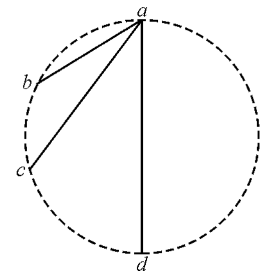

图 2

A. $t_1 < t_2 < t_3$　　B. $t_1 > t_2 > t_3$

C. $t_3 > t_1 > t_2$　　D. $t_1 = t_2 = t_3$

解析：设圆环半径为 R，杆与水平面的夹角为 α，则杆长可表示 $2R\sin\alpha$，根据牛顿第二定律

$$mg\sin\alpha = ma$$

$$2R\sin\alpha=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha$$

可得 $t=\sqrt{\frac{4R}{g}}$，可见 t 与 α 无关，故下滑时间相同. 答案为选项 D.

总结 2：物体沿着位于同一竖直圆上的最高点由静止沿光滑弦下滑到圆周上各点，所用时间相同，均为 $t=\sqrt{\frac{4R}{g}}$. 运动时间与弦的倾角、长短无关.

2　构造等时圆

有时命题人为了增加题目的难度，不直接在题目当中给出等时圆，这时就需要同学们根据对等时圆的理解，自己构造出一个等时圆，来解决问题.

2.1　释放点在最高点的等时圆的构建

【例 2】如图 3(a) 所示，光滑细杆 BC，DC 和 AC 分别构成矩形 $ABCD$ 的两邻边和对角线，AC∶BC∶DC＝5∶4∶3，AC 杆竖直，各杆上分别套有一质点小球 a，b，d，3 小球的质量比为 1∶2∶3，现让 3 小球同时从各杆的顶点由静止释放，不计空气阻力，则 a，b，d 3 小球在各杆上滑行的时间之比为

A. 1∶1∶1　　B. 5∶4∶3

C. 5∶8∶9　　D. 1∶2∶3

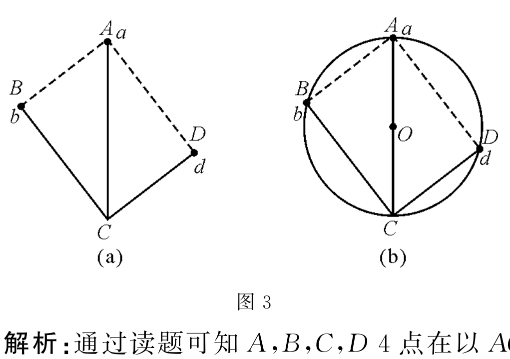

图 3

解析：通过读题可知 A，B，C，D 4 点在以 AC 为直径的圆周上，圆在竖直平面内，A 是圆的最高点. 因此我们就能够以 AC 的中点 O 为圆心，OA 为半径画出外接圆. 如图 3(b) 所示，利用等时圆的结论，可知时间之比为 1∶1∶1. 所以 A 正确.

总结 3：当题中没有直接给出等时圆时，需要我们自己去构造一个等时圆，并且要保证小球的释放点是圆的最高点，或者小球到达的最低点是圆的最低点.

【练习 2】如图 4(a) 所示，AB 和 CD 是两条光滑斜槽，它们各自的两端分别位于半径为 R 和 r 的两个相切的竖直圆上，并且斜槽都通过切点 P，有一个小球由静止分别从 A 滑到 B 和从 C 滑到 D，所用的时间分别为 t_1 和 t_2，则 t_1 和 t_2 之比为

A. 1∶1　　B. 1∶2

C. 1∶$\sqrt{3}$　　D. 1∶3

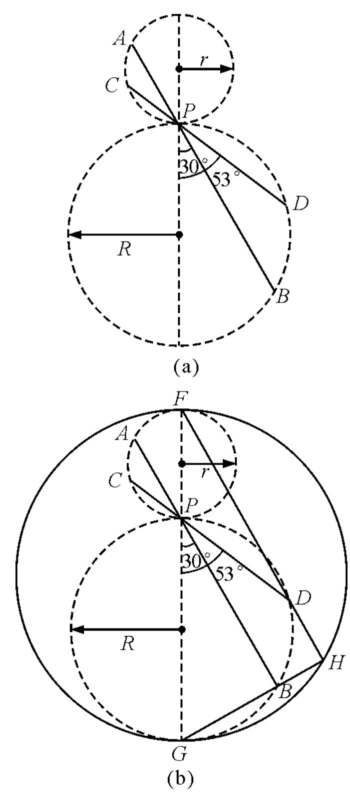

图 4

解析：根据等时圆的结论很容易得出 $t_{AP}=t_{CP}$，但是两个小球到达 P 点时，有速度，所以对 PD 和 PB 杆没有办法应用等时圆的结论来研究 t_{PD} 和 t_{PB} 的大小关系.

因此对沿 AB 槽下滑的小球应用牛顿第二定律和运动学公式来求小球下落的时间.

假设 AB 槽与竖直方向的夹角为 α，$AB=2(R+r)\cos\alpha$

$$AB=\frac{1}{2}at^2$$

$$mg\cos\alpha=ma$$

可以得出

$$t=\sqrt{\frac{4(R+r)}{g}}$$

可见 t 与 α 无关，故下滑时间相同，即 $t_{AB}=t_{CD}$. 所以选 A.

我们再对这个时间的表达式和这两个圆进行思

考，大胆的猜想 AB 和 CD 槽是否也在同一个圆上，这个圆的半径为 $(R+r)$. 即 AB 和 CD 槽是这个外切圆的弦.

下面验证一下这个观点，做一个半径为 $(R+r)$ 的圆，正好外切于大圆和小圆. 小圆的最高点为 F，连接 AF，则 AF 与 AB 垂直，过 F 点做 AB 的平行线，与外切圆相交于 H；大圆的最低点为 G，连接 GB，则 GB 与 AB 垂直，延长 GB，交外切圆于 H，GH 与 FH 相垂直，$ABHF$ 构成了一个矩形，所以 $FH=AB$. F，H，G 3 点都在外切圆上，并且 F 是圆的最高点，因此可以应用等时圆的结论

$$t_{FH}=t_{FG}=\sqrt{\frac{4(R+r)}{g}}$$

$$t_{FH}=t_{AB}$$

所以

$$t_{AB}=\sqrt{\frac{4(R+r)}{g}}$$

同理可证 CD 槽也是外切圆的一条弦. 故下滑时间相同，即

$$t_{AB}=t_{CD}$$

【练习 3】如图 5(a) 是一倾角为 α 的输送带，A 处为原料输入口，为避免粉尘飞扬，在 A 与输送带间建立一管道(假使光滑)，使原料从 A 处以最短的时间到达输送带上，则管道与竖直方向的夹角应为多大？

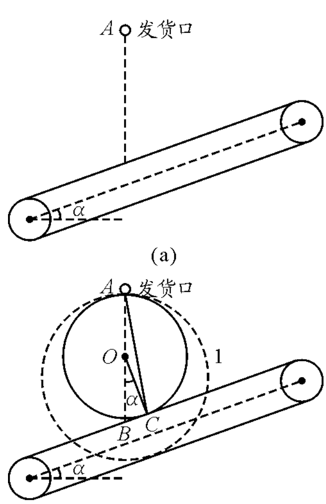

图 5

解析：如图 5(b) 所示，首先过 A 点做一条竖直线 AB，在 AB 上选取一点为圆心，以 A 点为最高点开始做圆，使得圆 1 与传送带相交，出现了两个交点，连接 A 和这两个交点，得到圆 1 的两条弦，由等时圆的结论可知，原料沿着两个管道下滑所用时间一样，不是最短. 要想时间最短，就要圆与传送带相切. 在竖直线 AB 上选取合适的点 O，以 O 为圆心 OA 为半径做圆，使得圆与传送带相切，切点为 C，连接 AC 和 OC. AC 即为所要的管道. 有几何知识可知 $\angle BOC=\alpha$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha$. 即所建管道为 AC，与竖直方向夹角为 $\frac{1}{2}\alpha$.

2.2 释放点不在最高点的等时圆的构建

有时让我们研究时间问题时，会发现物体的释放点不在圆的最高点，所以这时题目当中给的不是等时圆，这个圆不能直接用，还需要我们自己以释放点为最高点来构造等时圆，通过例题 3 来讲解一下如何构造释放点不在最高点的等时圆.

【例 3】如图 6(a) 所示，PA，PB，PC 是竖直面内 3 根固定的光滑细杆，P，A，B，C 位于同一圆周上，点 D 为圆周的最高点，C 点为最低点. 每根杆上都套着一个小滑环(图中未画出)，3 个滑环分别从 P 处释放(初速为零)，用 t_1，t_2，t_3 依次表示各滑环到达 A，B，C 所用的时间，则

A. $t_1<t_2<t_3$　　B. $t_1>t_2>t_3$

C. $t_3>t_1>t_2$　　D. $t_1=t_2=t_3$

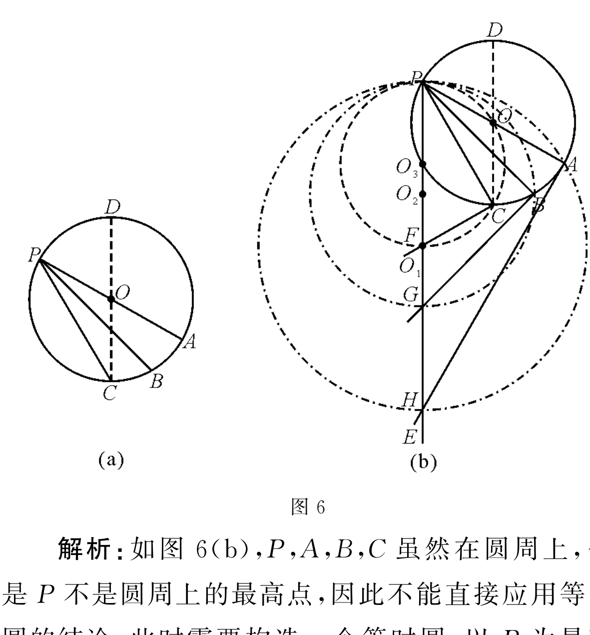

图 6

解析：如图 6(b)，P，A，B，C 虽然在圆周上，但是 P 不是圆周上的最高点，因此不能直接应用等时圆的结论，此时需要构造一个等时圆，以 P 为最高点，过 P 点做一条竖直线 PE，过 C 点做 PC 的垂线，

教学案例设计与分析

基于思维型课堂教学理论的“物体的浮沉条件及应用”教学设计

郎　和　孟菲菲
（西北师范大学教育学院　甘肃 兰州　730070）

（收稿日期：2015 - 12 - 31）

摘　要：本文以思维型课堂教学理论为依据，遵循思维互动的核心思想，探讨了以激发学生思维的积极主动性、发挥思维的效能、提高课堂教学的效果为目的的初中物理课堂教学设计程序，并将其应用于人教版初中物理“物体的浮沉条件及应用”的教学设计中.

关键词：思维型课堂　思维互动　浮沉条件及应用

培养学生的思维能力是初中物理教学的一个重要方面，在初中物理教学中如何有效地培养学生的思维能力，很多教师都进行了不同的探索. 林崇德与胡卫平教授指出思维是智力和能力的核心，思维活动是课堂教学中师生的核心活动，并以林崇德教授的“三棱结构”思维模型为理论依据，二人提出了思维型课堂教学理论. 经过三十几年的中小学教学实践，证明该理论可以有效提高课堂教学质量. 如何将该理论应用到初中物理课堂教学中培养学生的思维能力，提高课堂教学的效果呢? 本文设计了基于该理论的教学程序，并应用于“物体的浮沉条件及应用”的教学.

1　思维型课堂教学理论

基于“三棱结构”思维模型，思维型课堂教学理论包括 4 个基本原理：认知冲突、自主建构、自我监控和应用迁移；依据“课堂教学中师生的核心活动是思维”以及“思维结构的构成要素及其影响因素”[1]，该理论中提出 7 个课堂基本要求：明确课堂教学目标、突出知识形成过程、联系已有知识经验、重视非智力因素培养、训练思维品质以提高智力能力、创设良好教学情境、分层教学因材施教. 同时，该理论还倡导师生的课堂互动，强调了在教学活动中“双主体”的师生关系的重要性，突出了课堂教学中的核心是教师和学生积极思维.

2　基于思维型课堂教学理论的教学设计程序

以 4 个基本原理为指导，以思维互动为核心思想，在遵循 7 个基本要求的基础上，设计的教学程序如图 1 所示.

交 PE 于 F 点. PF 即为弦 PC 所在圆的直径，以 PF 的中点 O_3 为圆心，以 O_3F 为半径做圆，就得到了一个等时圆 O_3. 同理可做 PB 弦所在的等时圆 O_2，PA 弦所在的等时圆 O_1，可知 $t_1=\sqrt{\dfrac{2PH}{g}}$，$t_2=\sqrt{\dfrac{2PG}{g}}$，$t_3=\sqrt{\dfrac{2PF}{g}}$. 所以 $t_1>t_2>t_3$. 所以选 B.

总结 4：释放点不在圆的最高点时，需要自己构造一个圆，这个圆以释放点为最高点，过所在轨道的最低点做垂线，垂线与释放点所在的竖直线会出现一个交点，释放点与交点之间的距离即为等时圆的直径，中点为轨道所在等时圆的圆心. 也可以这样来构造等时圆，过轨道的中点做垂线，垂线与释放点所在竖直线会出现一个交点，交点即为轨道所在等时圆的圆心，释放点到交点的距离为等时圆的半径.

参考文献

1　王睿峰. “等时圆”的基本规律及其应用. 物理通报，2012(02)：125 ～ 127
2　陈栋梁.“等时圆”的等时“原理”在物理问题解决中的妙用. 物理教师，2013(03)：28