光波的多普勒效应*

张子珍

（山西大同大学物理与电子科学学院　山西 大同　037009）

（收稿日期：2016－02－03）

摘　要：光波的多普勒效应属狭义相对论的范畴，本文用几何语言和非几何语言的狭义相对论知识推导了光波的多普勒效应公式，并且将两种方法作了比较分析.

关键词：狭义相对论　几何语言　多普勒效应

1　非几何语言中狭义相对论的多普勒效应

1.1　4 波矢的引入

按照洛伦兹变换下的变换性质，物理量分为 3 类：洛伦兹标量、矢量、张量[1]. 电磁波的相位因子 φ 是洛伦兹标量，即由 $\sum$ 系变到 $\sum'$ 系时

$$\varphi=\varphi' \tag{1}$$

电磁波传播因子为 $e^{i\varphi}$，其中 φ 在 $\sum$ 系的表达式为

$$\varphi=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t$$

在 $\sum'$ 系的表达式为

$$\varphi'=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega' t'$$

因相位是洛伦兹标量，故

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega' t' \tag{2}$$

$(\boldsymbol{x},ict)$ 构成四维矢量 —— 洛伦兹坐标，则 $\left(\boldsymbol{k},i\dfrac{\omega}{c}\right)$ 合成另一个四维矢量 ——4 波矢

$$k_\mu=\left(\boldsymbol{k},i\frac{\omega}{c}\right) \tag{3}$$

且

$$k_\mu x_\mu=k'_\mu x'_\mu$$

1.2　k_μ 在洛伦兹变换下的变换关系

$$k'_\mu=a_{\mu\nu}k_\nu \tag{4}$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 为洛伦兹变换矩阵.

$$a_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{cases}k'_1=\gamma\left(k_1-\dfrac{v}{c^2}\omega\right)\\ k'_2=k_2\\ k'_3=k_3\\ \omega'=\gamma(\omega-vk_1)\end{cases} \tag{6}$$

其中 ω' 为光源的静止参考系 $\sum'$ 测得的光源的频率，即固有频率 ω_0，k_1 为 $\sum$ 系的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的 1 分量，设 $\boldsymbol{k}$ 与 x 轴夹角为 θ，则 $k_1=k\cos\theta$，在 $\sum$ 系测得光源的频率 ω 为

$$\omega=\frac{\omega_0}{\gamma\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)} \tag{7}$$

式(7) 即为多普勒效应.

当 $\theta=0$ 时，得

$$\omega=\frac{\omega_0}{\gamma\left(1-\dfrac{v}{c}\right)}=\omega_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

当 $\theta=\pi$ 时，得

$$\omega=\frac{\omega_0}{\gamma\left(1+\dfrac{v}{c}\right)}=\omega_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，得

$$\omega=\frac{\omega_0}{\gamma}=\omega_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

2　几何语言中狭义相对论的多普勒效应

2.1　4 势 A_a 的引入

在四维几何语言中，电磁场张量 F_{ab} 是 2 形式

* 高等学校数学物理方法课程教学研究项目，项目编号：JZW－14－SL－14

作者简介：张子珍（1965－　），女，教授，研究方向为物理教学与理论物理.

场，由麦克斯韦方程组 $\partial_{[a}F_{bc]}=0$，可知 F_{ab} 是闭的，又因为背景流形为 IR^4，IR^4 是单连通流形，单连通流形上闭的微分形式必是恰当的，故 F 是恰当的. 即 IR^4 存在 1 形式场 A_a，使 $F=\mathrm{d}A$，或 $F_{ab}=\partial_a A_b-\partial_b A_a$，$A_a$ 就是电磁场的 4 势[2].

2.2　4 势的微分方程及洛伦兹规范条件

四维几何语言中的麦克斯韦方程组

$$\partial^a F_{ab}=-4\pi J_b \tag{8}$$

用 4 势表达为

$$\partial^a\partial_a A_b-\partial^a\partial_b A_a=$$

$$\partial^a\partial_a A_b-\partial_b\partial^a A_a=-4\pi J_b \tag{9}$$

洛伦兹规范条件

$$\partial^a A_a=0 \tag{10}$$

将式(10) 代入式(9)，得

$$\partial^a\partial_a A_b=-4\pi J_b \tag{11}$$

式(11) 就是 4 势满足的微分方程，即达朗贝尔方程.

无源电磁场的波动方程

$$\partial^a\partial_a A_b=0 \tag{12}$$

2.3　波动方程的解及光子的 4 波矢 K^a

对波动方程式(12) 取形式为

$$A_b=C_b\cos\theta \tag{13}$$

的解，将式(13) 代入到式(12) 中，得

$$\partial^a\partial_a A_b=\partial^a\partial_a(C_b\cos\theta)=C_b\partial^a(\sin\theta\partial_a\theta)=$$

$$-C_b(\cos\theta)\partial^a\theta\partial_a\theta-C_b\sin\theta\partial^a\partial_a\theta=0$$

故满足

$$\partial^a\theta\partial_a\theta=0 \tag{14}$$

$$\partial^a\partial_a\theta=0 \tag{15}$$

的式(13) 则为式(12) 的解. 令 $K^a=\partial^a\theta$，由式(14)，有

$$K^a K_a=0 \tag{16}$$

可见 K^a 是类光矢量. 且 $\nabla_a\theta\,|_{\theta=c}\neq 0$，故由 $\theta=c$ 给出类光超曲面 $\varphi[S]$，K^a 是类光超曲面法矢量.

又根据式(16)

$$\partial_b(K^a K_a)=2K^a\partial_b K_a=2K^a\partial_b\partial_a\theta=$$

$$2K^a\partial_a\partial_b\theta=2K^a\partial_a K_b=0$$

K^a 是躺在类光超曲面上的类光测地线，由 $K^a=\partial^a\theta$，得

$$(\mathrm{d}\theta)_a=K_a=K_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a \tag{17}$$

由式(15) 得 $\partial^a K_a=0$，K^a 是常矢量，积分式(17)，得

$$\theta=K_\mu x^\mu+\theta_0 \tag{18}$$

将式(18) 代入式(13)，得

$$A_b=C_b\cos(K_\mu x^\mu+\theta_0) \tag{19}$$

$$K_\mu=K_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$

K^a 在惯性系$\{t,x_i\}$ 中的 3 + 1 分解：取 $K^0=\omega$，得

$$K^a=\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+k^a \tag{20}$$

取 $\theta_0=0$，得

$$A_b=C_b\cos(-\omega t+k_i x^i)$$

K^a 就是光子的 4 波矢.

2.4　多普勒效应

如图 1，设光源和观者有任意的运动状态，其世界线为任意的类时线，4 速分别为 V^a，U^a. 设光子的 4 波矢为 K^a

$$\theta=-\omega t+k_i x^i \qquad K^a=\omega Z^a+k^a$$

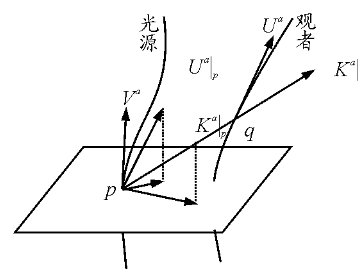

图 1　光波的多普勒效应

光源在 p 点发出的光线被观者在 q 点接收. 发光时 V^a 测得的角频率为

$$\omega=(-K^a V_a)\,|_p$$

接收光时 U^a 测得的角频率为

$$\omega'=(-K^a U_a)\,|_q$$

将$U^a\,|_q$ 与$K^a\,|_q$ 平移至 p 点，则

$$\omega'=(-K^a U_a)\,|_p$$

$$K^a=\omega V^a+k^a$$

$$\gamma=-V^a U_a$$

$$U_a=\gamma V_a+\gamma u_a$$

则

$$\omega'=(-K^a U_a)\,|_p=$$

$$-(\omega V^a+k^a)(\gamma V_a+\gamma u_a)=$$

$$\gamma(\omega-k^a u_a)$$

设空间矢量 k^a 和 u^a 的夹角为 θ，则

$$\omega'=\gamma\omega(1-u\cos\theta)$$

若 $\theta=0$，则

$$\omega'=\lambda\omega(1-u)=\omega\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}<\omega$$

红移.

若 $\theta=\pi$,则

$$\omega'=\lambda\omega(1+u)=\omega\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}>\omega$$

蓝移.

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$,则

$$\omega'=\gamma\omega$$

即横向多普勒效应.

3　两种方法的比较

通过非几何语言与几何语言狭义相对论对多普勒效应的推导,可以看出:非几何语言简单、明了,仅通过四维矢量的洛伦兹变换关系就可推出多普勒效应[3,4].但不足之处是人为地引入了相位不变性,即设定相位是洛伦兹标量.在几何语言的狭义相对论中,从微分几何的二形式场出发,引入 4 势 A_a,代入麦克斯韦方程组,得出 4 势 A_a 的波动方程,解无源电磁波的波动方程,自然地引入 4 波矢 K^a,并且 K^a 的物理意义非常明确,它是类光矢量,而且是由 $\theta=c$ 给出类光超曲面的法矢量,K^a 是躺在类光超曲面上的类光测地线.通过 K^a 在惯性系$\{t,x_i\}$的 3+1 分解,很自然得出多普勒效应.但几何语言所用的数学知识深奥,理论性强,比较难懂,对狭义相对论的理解可以上一个很高的台阶,而且为后续广义相对论的学习打下了扎实的基础.但对没有接触微分几何的学者来说,普通电动力学教材狭义相对论的讲法不失为一种通俗、易懂的方法.

参 考 文 献

1　郭硕鸿.电动力学(第 3 版).北京:高等教育出版社,2008.06

2　梁灿彬.微分几何入门与广义相对论(上册).北京:北京师范大学出版社,2002.06

3　章敏.大学物理中多普勒效应的教学体会.数理与化学研究,2013(06)

4　姚晓玲,宋世军.多普勒效应及其应用探讨.漯河职业技术学院学报,2014,13(5):87～88

The Doppler Effect of Light Wave

Zhang Zizhen

(College of Physics and Electric Science, Datong University, Datong, Shanxi　037009)

Abstract: The doppler effect of light belong to the category of special relativity. We derived the formula for light wave doppler effect using geometry and non-geometry languages of special relativity , and made a comparative analysis of two kinds of methods.

Key words: special relativity; geometry language ; doppler effect

(上接第 10 页)

Solution Discusses on Electric Field Intensity and Potential Distribution of a Charged Spherical Surface and a Charged Sphere

Liu Minmin　Zu Fengxia　Wu Tao

(School of science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan, Hubei　430205)

Abstract: In the teaching of electrostatic field in university physics, problems related to the spherical is tipical, such as eletric field intensity and electric potential distribution problem for a charged spherical surface or a charged sphere with different charge density. This paper discusses and analyses these problems, and find out the general law and characters with using the definition and the Gauss theorem.

Key words: a charged spherical surface; a charged sphere; eletric field intensity; electric potential