浅析卫星变轨运动

姚黄涛　冯　杰

（上海师范大学　上海　200234）

（收稿日期：2016－01－20）

摘　要：从高中物理天体运动的一类题目出发，从角动量角度分析了卫星绕地球变轨运动的详细过程，从能量的角度计算了卫星运动轨道半径和卫星能量的关系.

关键词：天体运动　能量　角动量

1　引言

在高中物理天体运动这一章中，学生们经常会遇到这样一类的题目[1]：

【例题】某人造地球卫星因受高空稀薄空气的阻力作用，绕地球运转的轨道会慢慢改变，多次测量中的卫星的运动可近似看作圆周运动. 某次测量卫星的轨道半径为 r_1，后来变为 r_2，$r_2 < r_1$，以 E_{k1}，E_{k2} 表示卫星在这两个轨道上的动能，T_1 和 T_2 表示卫星在这两个轨道上绕地球运动的周期，则

A. $E_{k2} < E_{k1}$，$T_2 < T_1$

B. $E_{k2} < E_{k1}$，$T_2 > T_1$

C. $E_{k2} > E_{k1}$，$T_2 < T_1$

D. $E_{k2} > E_{k1}$，$T_2 > T_1$

此题的答案应选择 C. 因为沿圆轨道运动的人造卫星，若受到某种阻力作用使其运动速率减小的同时，将由于万有引力大于所需的向心力而导致卫星运动的轨道半径减小，而轨道半径在减小的卫星又会由于万有引力对其做正功反使其运动速率增大. 事实上，随着阻力的作用，轨道半径将变小，而运动速率将变大. 但是有些学生会问，“既然重力和阻力都在做功，怎么就一定是重力做的功大于克服阻力做的功而使卫星的动能增加呢？”为了将此类问题分析清楚，我们考虑以下两个问题：

(1) 卫星是如何从一个大轨道改变到一个较小轨道的，即变轨的详细过程是怎样的.

(2) 卫星所受阻力做的功要满足什么条件才能保证卫星还能稳定飞行于轨道上.

2　卫星降落过程的速度与轨道半径（$v-r$）关系

根据理论力学中的结论，当卫星受到一个阻力作用后，其线速度方向不再与轨道的矢径垂直，卫星会以椭圆轨道绕地球飞行. 但在这里，我们只考虑卫星所受扰动很小，且轨道是慢慢改变的，卫星的运动仍可近似看作圆周运动.

对于做稳定环绕运动的卫星，万有引力提供向心力使卫星做圆周运动

$$F_{万} = m\frac{GM}{r^2}$$

$$F_{向} = m\frac{v^2(r)}{r}$$

可得

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{1}$$

这里的 $v(r)$ 为卫星做稳定圆周运动（不变轨）的速度. 若卫星在半径为 r_0 的轨道上稳定地绕地球飞行，在此过程中极短时间内受到一个扰动，导致飞行速度变为 $v'(r_0)$，此 $v'(r_0)$ 小于卫星在这一轨道上的稳定绕行速度 $v(r_0)$. 在这一扰动之后，卫星就会往较小的轨道运动. 假设变轨的过程无阻力，扰动是由卫星自身动力系统提供的. 卫星只受到地球对它的万有引力作用，万有引力是一个有心力，所以卫星所受的力对地球球心的力矩等于零，卫星对地球球心的角动量守恒，所以

$$r_0 v'(r_0) = r v'(r)$$

$$v'(r)=\frac{r_0}{r}v'(r_0) \tag{2}$$

式中 r_0 为卫星初始的稳态运动轨道半径，$v'(r_0)$ 为受到扰动后的速度，$v'(r)$ 为不同轨道半径下卫星的速度.

式(1) 和式(2) 都是卫星速度与轨道半径的关系式. 它们之间的区别是：式(1) 中的速度是衡量卫星的飞行状态的，这个速度是状态量，只要达到了这个状态，卫星的轨道就是被约束的而不会发生变化. 式(2) 中的速度与半径的关系是卫星变轨的过程中它们所满足的关系，因而是过程性的. 将式(1) 和式(2) 同时作于 $v-r$ 图上，如图 1 所示.

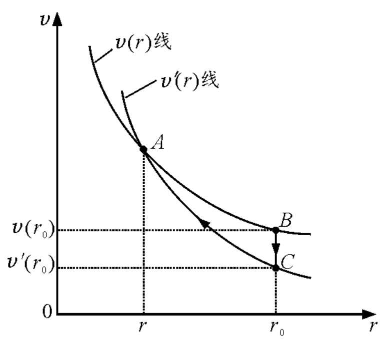

图 1

一开始卫星以 $v(r_0)$ 的速度稳定地在 r_0 轨道上绕行，对应图中 B 点，受到扰动后，卫星速度变为 $v'(r_0)$，对应图中 C 点，然后卫星将变轨至较小的轨道，变轨的过程对应到图上为沿着 $v'(r)$ 线从 $C\rightarrow A$，A 为 $v(r)$ 和 $v'(r)$ 线的交点，这时卫星在轨道 r 上稳定飞行. 因此，当卫星受到扰动变轨后无需提供动力，它会自动调整至稳态曲线上 A 点对应的轨道. 不同的 $v'(r_0)$ 对应不同的 A 点，相当于在图像上上下平移 $v'(r)$ 线后得出不同的交点. 对于 A 点，$v'(r)=v(r)$，则

$$v'(r_0)=\frac{r}{r_0}v'(r)=\frac{r}{r_0}v(r)=$$

$$\frac{1}{r_0}\sqrt{GMr} \tag{3}$$

设 r 为受到扰动后最终达到的稳态轨道半径，扰动的总冲量为 I，r_0 为初始时刻稳态轨道，根据动量定理

$$I=\Delta p=m[v(r_0)-v'(r_0)]$$

代入式(1)、(3)

$$I=m\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}-\frac{\sqrt{GMr}}{r_0}\right)$$

得
$$\frac{\sqrt{GM}}{r_0}r^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}-\frac{I}{m}$$

$$r=\left[r_0^{\frac{1}{2}}-\frac{I}{m}(GM)^{-\frac{1}{2}}r_0\right]^2 \tag{4}$$

上式即为在轨道 r_0 飞行的卫星受到冲量 I 的扰动后，最终会到达的轨道 r 的大小.

3　卫星绕行的能量与轨道半径($E-r$)关系

上面是从速度与轨道半径的角度对卫星变轨过程的一个讨论，未涉及能量，下面从能量的角度讨论卫星稳定于轨道上的条件.

卫星绕地飞行所具有的能量无非是动能与势能. 当卫星能稳定于一个轨道上绕地球做匀速圆周运动时，动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2(r)$，代入式(1) 得

$$E_k=\frac{1}{2}m\frac{GM}{r} \tag{5}$$

卫星在某位置所具有的引力势能在数值上等于将卫星从此位置移动到距离地球无穷远处引力对卫星所做的功，则

$$E_p=-\int_r^{\infty}F_{万}\,\mathrm{d}R=-\int_r^{\infty}\frac{GMm}{R^2}\mathrm{d}R$$

式中加负号是因为引力做负功

$$E_p=(-GMm)\left(\frac{R^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_r^{\infty}=$$

$$GMm\,\frac{1}{R}\Bigg|_r^{\infty}=-\frac{GMm}{r} \tag{6}$$

所以卫星稳定飞行于轨道 r 上时具有的能量为

$$E(r)=E_p+E_k=$$

$$\frac{GMm}{2r}-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r} \tag{7}$$

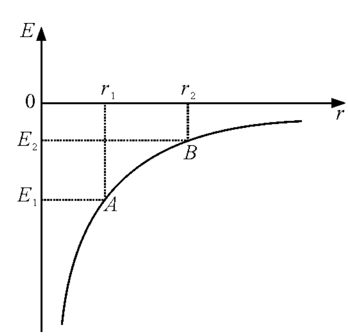

图 2　能量与轨道半径示意图

电荷摆球平衡问题

褚会锋
（菱湖中学　浙江 湖州　313018）
邱为钢
（湖州师范学院理学院　浙江 湖州　313000）

（收稿日期：2016－01－09）

摘　要：分析了电荷摆球平衡问题“陷阱”，问题来自两个带电小球相对位置的特殊性，即位于同一竖直线上．对于特殊情况，详细分析了平衡稳定位形和稳定性与各参数的关系．

关键词：电荷摆球　平衡　稳定性

中学物理力电模块一个常见的模型是电荷摆球，一个带电小球 B 固定，另一个带电（同种电荷）小球 A 悬挂，求体系平衡时的位形．固定小球 B，悬挂点 O，悬挂小球 A 这三者位置没有限制，可以任意摆放．如果出题者偏要把固定小球放在悬挂点的下方，这时就会出现文献[1] 所指出的“陷阱”问题，当两个小球电量完全消失后，用力相似三角形和极限法计算得到的绳子拉力不一样．我们先分析一般情况，说明“陷阱”问题的根源，然后就特殊情况详细分析体系平衡时满足的条件以及平衡的稳定性判据．

设一般情况下悬挂点为 O，摆球为 A，固定球为 B，BA 连线与 O 点正下方直线交于点 C，如图 1 所示．

设绳子中张力为 T，摆球 A 重力 $G = mg$，两球库仑力为 F，绳长 $OA = l$，$OC = h$，$AC = d$，那么由力相似三角形，得到

$$\frac{G}{h} = \frac{T}{l} = \frac{F}{d} \tag{1}$$

与文献[1] 特殊情况不同，这里的 h 是变化的，当两球电荷逐渐变小到零时，$F \to 0$，$d \to 0$，$h \to l$，$T \to G$，没有矛盾，也没有“陷阱”．出现“陷阱”问题的根源在于题目设计得太巧了，固定小球正好在悬挂点的正下方．

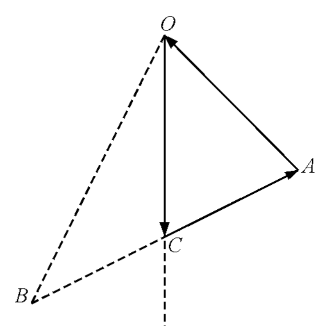

图 1　电荷摆球示意简图

我们利用能量（势能）方法[2] 来求体系的平衡位形以及判断平衡位形的稳定性．为简单考虑，只

图 2 为卫星在轨道上绕行时具有的能量和轨道半径的示意图，一个轨道对应一个能量；确定的能量对应一个确定的轨道．所以卫星的能量只有满足式(7)，卫星才能绕行于稳定的轨道上．对于在图上的 A 点和 B 点：其一，当卫星从 r_2 轨道运行至 r_1 轨道的过程中克服阻力做的功若大于 $E(r_2) - E(r_1)$，则卫星最后无法稳定于 r_1 上，其轨道半径会继续减小；其二，卫星在变轨时，能量是不守恒的，不仅仅是势能转化为动能，还必须损失一部分的能量才可以使卫星从大轨道绕行变换到小轨道绕行．

参考文献

1　吴敏，承开．高中物理重难点 16 讲．上海：上海交通大学出版社，2006．71 ～ 74