4 杨忠. 用量纲分析法求平面物体的转动惯量. 大学物理, 1997,16(4):45～46
5 许佳敏,邱为钢. 分形物体转动惯量的计算. 大学物理, 2011,30(11):53～55
6 方伟,涂泓,冯杰. 对量纲法求分形物体转动惯量的再思考. 大学物理,2016(In press)

Recurrence Method to Calculate the Moment of Inertia of Fractal Body

Wu Xiyang Tang Lingli Li Chaohua Gong Xue
(Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)
Fang Wei
(Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234;
Shanghai Key Lab for Astrophysics, Shanghai 200234)

Abstract: Using recurrence method, combined with dimensional analysis, scale transformation and parallel axis theorem, the moment of inertia of the Cantor set, Sierpinski carpet, Menger sponge and Sierpinski tetrahedron are calculated.

Key words: dimension analysis; fractal; moment of inertia; recurrence

有限长带电直导线的电荷不可能均匀分布

陈 钢 李成金
(苏州大学物理与光电·能源学院 江苏 苏州 215006)
丁振瑞
(河北大学物理科学与技术学院 河北 保定 071002)
(收稿日期:2016-03-10)

摘 要:本文特别讨论了有限长带电直导线的电荷分布问题,用简单的方法证明若有限长带电直导线电荷均匀分布,则带电直导线上的电势逐点变化,不符合导体静电平衡时为等势体的特征,因而证明有限长带电直导线的电荷不可能均匀分布.

关键词:导体 电荷分布 等势 证明

有限长带电直导线的电荷分布是一维静电问题中的一个重要的基础性问题,这个看似简单的问题其实相当困难.近来关于有限长带电直导线的电荷分布的讨论出现了两种相反的意见,文献[1]用主轴压缩法给出有限长直导线电荷均匀分布的结果,而文献[2]用导体变形法给出有限长直导线电荷分布不均匀的结果,这两种不同的电荷分布显然是不相容的.

上述争论的焦点在于有限长带电直导线的电荷是否均匀分布?实际上,通过实验便可验证有限长带电直导线的电荷是否均匀分布,文献[3]利用有限差分法求解有限长直导体棒拉普拉斯方程定解问题,对有限长导体棒电荷面密度进行了数值模拟,结果表明有限长带电直导线电荷的分布不均匀,且边缘电荷较多而中心电荷较少.

直接计算有限长均匀带电直导线上的电势分布函数是十分困难的,本文用简单的方法证明如果有限长带电直导线上的电荷均匀分布,则带电直导线

上的电势必然逐点变化，由此证明有限长均匀带电直导线不符合导体静电平衡时必为等势体的基本特征，从而证明了有限长带电直导线的电荷不可能均匀分布.

如图 1 取一段带电直导线，设所带电荷沿直导线均匀分布，记有限长带电直导线的中点 O 的电势为 U_O，端点 A 点的电势为 U_A.

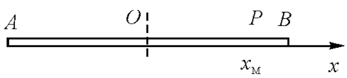

图 1　比较有限长均匀带电直导线上各点的电势

以端点 A 为原点，沿直导线向右取为 x 轴，将线上两端点 AB 之间划分为 N 个（N 为足够大的偶数）线度相等的线元 $\mathrm{d}x$，每一线元所带电荷量均为 $\mathrm{d}q$，第 i 个电荷线元到原点 A 的距离为 x_i，任一点 P 到原点距离为 x_M，则中点 O，端点 A 和任一点 P 的电势近似为

$$U_O = 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_i} = 2\times\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{\frac{N}{2}}}\right) \tag{1}$$

$$U_A = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_i} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_N}\right) \tag{2}$$

$$U_P = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_i} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_M}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{N-M}}\right) \tag{3}$$

当令 N 趋于无穷时即为精确值，两点电势大小关系不变，比较以上 3 式可知

$$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{\frac{N}{2}}}\right) > \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_M}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{N-M}}\right) > \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_N}\right)$$

故有 $U_O > U_P > U_A$. 由此可知电势从中点向两侧是单值单调连续递减的分布函数，所以有限长均匀带电直导线的中心电势最高而两端电势最低，表明均匀带电直导线不是等势体，不符合导体静电平衡时为等势体的特征.

上述证明的结论也可陈述为：有限长带电直导线的电荷不可能均匀分布.

有限长带电直导线可以用有限长细椭圆柱作为实际模型，电荷分布在细椭圆柱表面. 由椭圆柱表面电荷分布函数

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

令 $a \gg b = c$，化为细椭圆柱表面电荷分布函数，有

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+a^2\,\frac{y^2+z^2}{b^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

由椭圆柱面方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$，代入得

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi b^2}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\frac{a^2}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

由于 $a \gg b$，即 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\approx -\frac{1}{b^2}$，可得

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\frac{a^2}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{x^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{6}$$

利用线电荷密度分布和面电荷密度分布的关系 $\lambda\,\mathrm{d}x = 2\pi b\sigma\,\mathrm{d}x$，可得细椭圆柱的电荷线密度为

$$\lambda = 2\pi b\sigma = \frac{Q}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{7}$$

由细椭圆柱模型，电荷线密度分布与有限长直导体线长 a 有关，在 $x=\pm a$ 的导体端点处电荷线密度无限大，细椭圆柱电荷分布实际模型的意义表明有限长带电直导线的电荷密度不可能均匀分布.

利用计算机作图的方法可以直观地看到有限长带电直导线电荷分布产生的电势分布. 对于电荷均匀分布带电线，其空间电势分布函数为

$$\varphi(x,y) = \int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}} \tag{8}$$

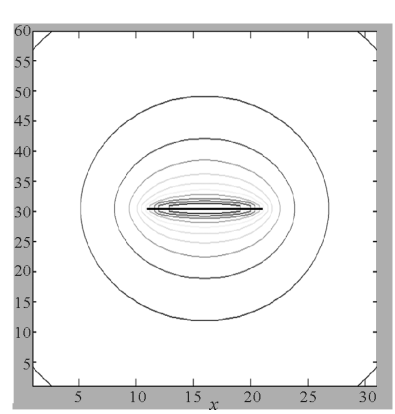

图 2　均匀带电线等势面为旋转椭球面

对式(8) 取参数设置：$\lambda_0 = 1, y' = 30, a = 1$，用 Matlab 绘出二维电势分布(旋转椭球面的剖面) 如图 2，可以清楚地看到均匀带电线的(平面剖面) 内层等势面与带电线相交，表明带电线上逐点电势并不相等.

同样，对于电荷分布为 $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 的有限长带电直导线，其空间电势分布为

$$\varphi(x, y) = \int_{-l}^{l} \frac{\lambda_0 \mathrm{d}x'}{\sqrt{a^2 - x'^2}\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \tag{9}$$

用 Matlab 绘出二维电势分布如图 3 所示.

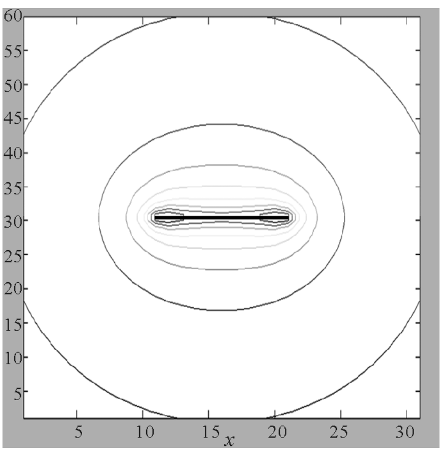

图 3　有限长带电直导线等势面为旋转椭球面

可以看出带电线(平面剖面) 等势面只包围带电线，而不能与带电线相交.

总之，电荷均匀分布的带电直导线不符合带电导体是等势体的特征，因而有限长带电直导线的电荷不可能均匀分布.

参 考 文 献

1　于凤军. 导体椭球的电荷分布在主轴方向上的压缩不变性. 大学物理，2011，30(4)：25 ～ 27

2　陈钢. 有限长带电导体直线的电荷分布. 大学物理，2011，30(10)：28 ～ 29

3　唐妍梅，杨河林. 有限长导体棒电荷分布的数值模拟. 大学物理，2006，25(8)：17 ～ 19

4　余陨金，卫亚东. 导体椭球的面电荷密度和曲率的关系. 大学物理，2006，25(7)：6 ～ 7

5　贾秀敏. 均匀带电圆环片空间静电场. 2010，29(8)：29 ～ 30

6　熊建平. 导体薄圆盘的电荷分布. 大学物理，1999，18(5)：8 ～ 10

7　斯迈思. W · R · 静电学和电动力学(上). 北京：人民教育出版社，1979. 29 ～ 35

8　赵诗华，李英骏. 带电导体椭球表面的电荷密度与电场. 大学物理，2008，27(7)：28 ～ 19

9　张之翔. 带电导体椭球的电势和电荷分布. 大学物理，2008，27(1)：11 ～ 13

The Uniform Distribution of Charges is not the Characteristic of the Finite Charged Straight - line Conductor

Chen gang　Li Chengjin

(College of Physics，Optoelectronics and Energy of Soochow University，Suzhou，Jiangsu　215006)

Ding Zhenrui

(College of Physics & Technology，Hebei University，Baoding，Hebei　071002)

Abstract：In this paper，the distribution of charges for the finite charged straight － line conductor is discussed specially. It is demonstrated with easy way that if the distribution of charges for the finite charged straight - line conductor was uniform，the electric potential for the charged conductor line would vary from point to point，and it would be not in accordance with the property of equipotential for conductors. Therefore，the distribution of charges for the finite charged straight - line conductor is non - uniform absolutely.

Key Words：Conductor；Charge Distribution；Equipotential；Demonstration