

质点沿竖直光滑曲线运动时脱离约束点研究

田宝国 吴世永 宿德志

(海军航空工程学院基础部 山东烟台 264001)

(收稿日期:2015-03-23)

摘要:利用质点运动动力学方程和机械能守恒定律,对质点在竖直平面内沿任意光滑曲线运动时脱离曲线的条件进行了研究,根据曲线方程的不同形式给出了质点脱离约束时的一般公式,并通过具体实例进行了验证.

关键词:光滑曲线 脱离约束 牛顿运动定律

在质点沿竖直平面内光滑曲线自由下滑过程中,如果在某处质点所受的支持力为零,则质点就会脱离曲线的约束而运动. 在一些教材中,主要针对曲线为圆和抛物线的情况进行了讨论^[1,2]. 本文利用质点运动的动力学方程和机械能守恒定律以及各种曲线方程的曲率半径公式,推导出了质点在竖直平面内沿任意光滑曲线自由下滑时脱离曲线约束的一般结论,给出了在各种曲线方程形式下质点脱离曲线时的一般公式,并借此对圆、抛物线、正弦曲线等具体曲线的例子进行了研究.

1 质点脱离曲线的一般公式

在如图1所示的直角坐标系中,设质量为 m 的质点沿竖直平面内的光滑曲线自由下滑,初始时刻质点位于点 $A(x_0, y_0)$ 处,下滑到任意点 $B(x, y)$ 时的速度为 v ,方向与 Ox 轴的夹角为 θ ,受力情况如图1所示. 根据牛顿第二定律,质点在法向上的动力学方程为

$$mg \cos \theta - F_N = m \frac{v^2}{\rho} \quad (1)$$

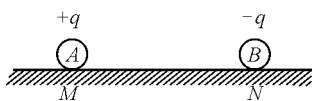


图2

答案: $E_1 = E_2 > E$.

解析:两球碰前的库仑力做正功,动能增加;两球碰后,正、负电荷中和,没有了库仑力,在它们返回 M 与 N 两点的过程中电场力不做功,所以动能增大.

问题的提出: $E_1 + E_2 > 2E$,动能增加了,增加的动能从哪里来的?

问题的解析:设 M 与 N 两点相距 l ,金属小球 A 和 B 的半径为 R . 碰撞前,两金属小球系统在 M 与 N 两点的静电能为

$$W = W_{A\text{自}} + W_{B\text{自}} + W_{AB\text{互}} =$$

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} =$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$$

碰撞后,两小球系统在 M 与 N 两点的静电能为

$$W' = 0$$

碰撞前后,两小球系统静电能的减少量为

$$\Delta W = W - W' =$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} - 0 =$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} > 0$$

由能量守恒可知,两小球系统的静电能减少了 $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$,全部变成了两小球的动能,实现了静电能向动能的完全转化.

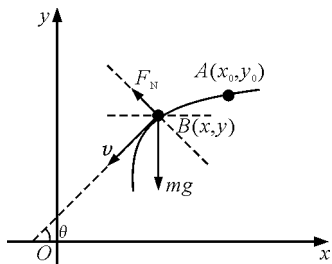


图1

其中, ρ 为曲线在 B 点处的曲率半径. 当质点脱离曲线约束时, $F_N = 0$, 于是得

$$mg \cos \theta = m \frac{v^2}{\rho} \quad (2)$$

根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg (y_0 - y) \quad (3)$$

由式(2)和式(3)得到

$$\rho \cos \theta = 2(y_0 - y) \quad (4)$$

其中

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (5)$$

下面根据不同曲线方程的形式给出质点脱离曲线约束时的一般表达式.

(1) 若曲线方程为 $y = f(x)$, 则曲率半径表达式为^[3]

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \quad (6)$$

当物体能够脱离约束, 曲线必为凸曲线, 即 $y'' < 0$, 为保证曲率半径为正, 则

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{-y''} \quad (7)$$

由式(4)、(6)、(7)可得此时脱离曲线约束时满足的方程为

$$1 + y'^2 = 2(y - y_0)y'' \quad (8)$$

(2) 若曲线方程为隐函数方程 $F(x, y) = 0$, 则曲率半径表达式为^[3]

$$\rho = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}} \quad (9)$$

由式(4)、(6)、(9)可得此时脱离曲线约束时满足的

方程为

$$(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}} = 2(y_0 - y) \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}} \quad (10)$$

即

$$(F_x^2 + F_y^2) |F_y| = 2(y_0 - y) \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

(3) 若曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 则曲率半径表达

式为^[3]

$$\rho = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right| \quad (12)$$

其中 \dot{x}, \dot{y} 分别表示 x, y 对参数 t 的一阶导数, \ddot{x}, \ddot{y} 分别表示 x, y 对参数 t 的二阶导数. 由式(4)、(6)、(12)同样可得此时脱离曲线约束时满足的方程为

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} |\dot{x}| = 2(y_0 - y) |\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}| \quad (13)$$

式(8)、(11)和(13)即为在不同曲线方程形式下质点脱离曲线约束时满足的表达式.

2 应用举例

(1) 曲线为半径为 R 的圆

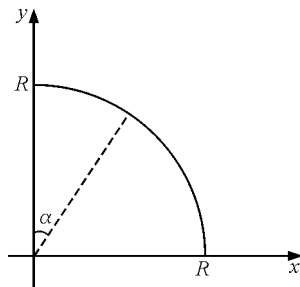


图2

若质点的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = R \sin \alpha \\ y = R \cos \alpha \end{cases}$$

假设质点从点 $(0, R)$ 开始下滑, 由曲线方程可得

$$\dot{x} = R \cos \alpha \quad \dot{y} = -R \sin \alpha$$

$$\ddot{x} = -R\sin\alpha \quad \ddot{y} = -R\cos\alpha$$

代入式(13)可得

$$3\cos\alpha = 2$$

即质点在 $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ 处脱离曲线, 与文献

[1] 结果一致.

(2) 椭圆

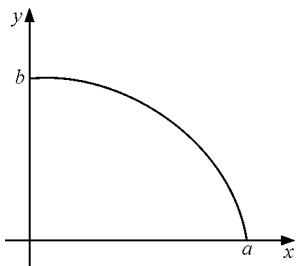


图 3

质点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

设质点从最高点 $y_0 = b$ 处由静止下滑, 由轨迹方程可得

$$F_x = \frac{2x}{a^2} \quad F_y = \frac{2y}{b^2}$$

$$F_{xx} = \frac{2}{a^2} \quad F_{yy} = \frac{2}{b^2}$$

代入式(11)可得方程

$$y^3 + \frac{3b^4}{a^2 - b^2}y - \frac{2b^5}{a^2 - b^2} = 0$$

其根的判别式为

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 =$$

$$\left(-\frac{b^5}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{b^4}{a^2 - b^2}\right)^3 > 0$$

所以方程有一个实根和两个复根, 实根表达式即为质点下滑时脱离曲线的位置, 根据一元三次代数方程求根卡尔丹公式^[3] 可得质点脱离曲线约束时的解为

$$y = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{b^5}{a^2 - b^2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{b^5}{a^2 - b^2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(3) 抛物线

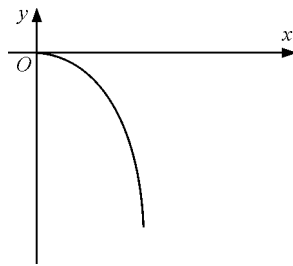


图 4

质点轨迹方程为

$$y = -ax^2 \quad (a > 0, x > 0)$$

设质点从原点 O 由静止开始下滑, 由轨迹方程可得

$$y' = -2ax \quad y'' = -2a$$

代入式(8)得到

$$2ax = 0$$

因为 $x > 0$, 所以方程无解, 说明质点自由下滑过程中不会脱离该抛物线.

(4) 正弦曲线

质点轨迹方程为

$$y = a\sin x$$

其中 $a > 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 设质点从 $y_0 = a$ 处由静止下滑, 因 $y' = a\cos x, y'' = -a\sin x$, 代入式(8)得到

$$a^2 \sin^2 x - 2a^2 \sin x + a^2 + 1 = 0$$

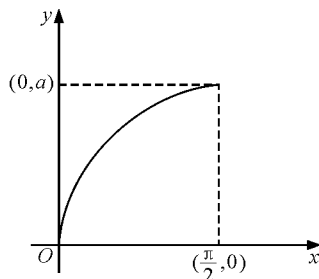


图 5

由于根的判别式 $\Delta = 4a^4 - 4a^2(a^2 + 1) < 0$, 所以方程不存在实根, 即质点不会脱离正弦曲线.

根据本文结论, 可对任意形状的平面曲线, 如双曲正弦线、普通摆线等进行研究, 在此不再赘述.

参考文献

- 1 李书民. 经典力学概论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2007. 13 ~ 14
- 2 周衍柏. 理论力学教程. 北京: 高等教育出版社, 2010. 73 ~ 74
- 3 数学手册编写组. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 2009. 88, 378