竞赛与
物理专题研修

转动物体的动能和“溜溜球”的机械能守恒

王岱川
（电子科技大学实验中学 四川 成都 611730）

（收稿日期：2016－03－30）

摘 要：借助转动物体的力学知识，对溜溜球的运动过程进行了分析和解释，证明其满足机械能守恒，且与圆盘沿斜坡滚动的过程具有相似性.

关键词：溜溜球 转动惯量 转动定律 机械能守恒 斜坡滚动

1 溜溜球的结构和运动

“溜溜球”是一种非常受中小学学生喜爱的玩具，有几十种玩法，比如：遛狗、睡眠、前抛、逃脱、摇篮、爬行者、升降机、卫星回收等等，这些丰富多彩的玩法中包含了中学所学的许多物理知识. 常见的溜溜球有两种类型，第一种类型比较简单，其结构如图1所示[1]，图2是溜溜球的剖面图. 图1的左右两侧是两个对称的圆盘，半径为 R，圆盘通过转轴固定连接，转轴半径 $r \ll R$，两个圆盘和固定连接的转轴构成了溜溜球的主体 A，转轴上缠绕细绳 C，细绳的一端固定在转轴上.

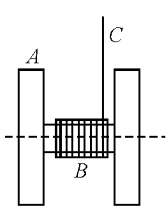

图1 溜溜球的结构

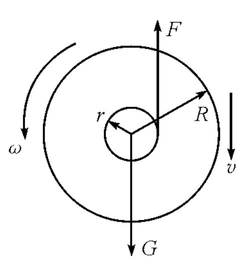

图2 下行时的受力分析

下面分析最基本的“下行上爬”运动[2]. 游戏者将细绳的另一端套在手指上，从高处释放溜溜球，溜溜球在重力和细绳拉力作用下匀加速下行，受力分析如图2所示（忽略空气阻力和摩擦力）. 由于细绳的约束，下行运动与细绳展开的速度相同，同时溜溜球沿轴心匀加速转动. 当细绳全部伸展时，溜溜球的转动速度和下行速度达到最大，并突然“转向”，开始上爬，当爬到最高点时，又重新开始下行，但转动方向相反. 之后溜溜球会自动下行上爬，由于阻力和摩擦力的阻碍，运动一段时间后逐渐停下来，如果每次“转向”时，轻往上提，补充损失的能量，则可反复“下行上爬”.

第二种溜溜球在图1的转轴上套上空轴 B，转轴与空轴 B 之间通过轴承光滑连接，细绳空套在 B 上而不固定连接，但在缠绕时须一层一层用力缠紧. 这种溜溜球阻力较小，转动速度更快，在下行结束时，并不立即上升，而是在底部持续转动，这种玩法称为“睡眠”. 当手指轻轻上抖，触发溜溜球迅速上爬，称为“唤醒”. 如果下落时用力往下甩，转动速度和持续运动的时间会明显增加，如果在“睡眠”时接触地面，溜溜球将沿地面滚动，游戏者收放细绳，则可完成“遛狗”“爬行”等玩法.

问题：物体下落时，重力势能转化为动能，但溜溜球到达底部时，速度 v 迅速减小为零，重力势能转化到哪里去了，机械能是否守恒？平动物体的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$，转动物体是否有动能，动能大小是多少？为什么溜溜球能自动上爬和下行？ 为什么溜溜球可以在底部睡眠？

下面首先讨论转动物体的动能，然后带着上述问题分析溜溜球的运动，最后，与斜坡上圆盘的滚动过程对比.

2 均匀圆环和均匀圆盘的转动动能

设圆环半径为 r，厚度为 δ，密度为 ρ，宽度为 $\mathrm{d}r$，圆环转动角速度为 ω，如图3所示. 其中一小段的质量为 m_i，当弧长足够小时，该段物体在某一时刻的速度可近似为该处的切线线速度，线速度为 $v = \omega r$，

相应的动能为$\frac{1}{2}m_i\omega^2 r^2$. 整个圆环的动能为

$$\sum_i \frac{1}{2}m_i\omega^2 r^2 =$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sum_i m_i = \pi\delta\rho\,\omega^2 r^3 \mathrm{d}r \tag{1}$$

由于圆环质量

$$m = 2\pi r\delta\rho\,\mathrm{d}r \tag{2}$$

所以式(1)中圆环的动能可表示为$\frac{1}{2}mr^2\omega^2$或$\frac{1}{2}I\omega^2$,其中$I=mr^2$为圆环的转动惯量.

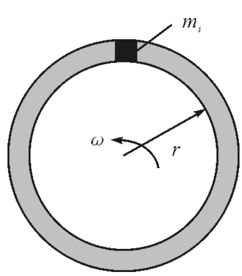

图 3　均匀圆环的动能

均匀圆盘可看作无数圆环构成,圆环宽度为 $\mathrm{d}r$,所有圆环具有同样的转动速度 ω,设圆盘半径为 R,圆盘质量为 $m=\pi R^2\delta\rho$,则其动能为式(1)在$[0,R]$区间的积分,即

$$\int_0^R \pi\delta\rho\,\omega^2 r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{4}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{3}$$

其中$I=\frac{1}{2}mR^2$为圆盘的转动惯量. 可见,圆环和圆盘的转动动能均为$\frac{1}{2}I\omega^2$,但转动惯量不同,均匀圆环的转动惯量为mr^2,而均匀圆盘为转动惯量为$\frac{1}{2}mR^2$.

3　溜溜球的运动过程分析和机械能守恒

下面分析第一种结构的溜溜球的运动过程,设图 2 中溜溜球圆盘的半径为 R,转轴的半径为 r,总的质量为 m. 下行过程中溜溜球的质心加速度为a_C,转动的角加速度为α_r,细绳长度为 h,由静止开始释放,线速度为 v,角速度为 ω,由于转轴和两个圆盘固定连接,角速度相同,可按式(3)计算溜溜球的转动惯量 I 和转动动能. 由图 2 有

$$ma_C = mg - F \tag{4}$$

溜溜球在下落的同时发生转动,细绳在切点处的展开速度即线速度 v,细绳同时约束了转动,所以 $v=\omega r$ 且$a_C=r\alpha_r$,力 F 对转动轴心的力矩为Fr,由转动定律[3]得 $Fr=I\alpha_r=\frac{a_C I}{r}$,代入式(4)得到

$$F = \frac{a_C I}{r^2} \tag{5}$$

$$a_C = \frac{g}{1+\frac{I}{mr^2}} \tag{6}$$

当细绳长度全部展开时,时间 $t=\sqrt{\frac{2h}{a_C}}$,初速度为零,所以

$$v = a_C t = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mr^2}}} \tag{7}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{2gh}{r^2+\frac{I}{m}}} \tag{8}$$

此时,溜溜球的动能包含向下的平动动能和转动动能,代入式(7)和式(8)得到

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 =$$

$$\frac{mgh}{1+\frac{I}{mr^2}} + \frac{Igh}{r^2+\frac{I}{m}} = mgh$$

可见,在下落起始时刻的势能与细绳全部展开时的动能之和相等,溜溜球的机械能守恒,重力势能转化为溜溜球的平动动能$\frac{1}{2}mv^2$和转动动能$\frac{1}{2}I\omega^2$. 在下落的任意时刻,时间 t 对应的下落高度不同,但机械能都是守恒的. 上述结论的前提条件是忽略细绳质量、摩擦力和空气阻力.

溜溜球为什么能自动上爬呢? 细绳完全展开后,向下运动的惯性拉伸细绳,平动动能转化为细绳的弹性势能,至最大形变后平动速度降为零,细绳的弹性恢复使溜溜球向上加速,对理想的弹性体,细绳的弹性势能完全转化为向上的平动动能,转化结束的瞬时速度大小与细绳完全展开瞬间相同. 但由于细绳不是理想的弹性体,转向后动能会有损失,这个转化过程在短时间内完成,游戏者的手指能感觉到短暂的抖动. 另一方面,细绳完全展开后由于转动惯性,溜溜球继续沿原有方向转动,并将细绳反向缠绕在转轴上,实现快速"转向",开始"上爬"运动. 转化

后的动能促使溜溜球“上爬”，由于转化过程中的动能损失和阻尼作用，爬升的高度不能达到初始位置．上升到最高点后重复下行过程，此时细绳在转轴上的缠绕方向改变，转动的方向与上一次下行的转动方向相反，游戏者可观察到最高点时，溜溜球转动逐渐停止，朝相反方向转动的现象．这样，溜溜球重复“下行－转向－上爬”的过程．若每次转向的时候，手指上提溜溜球，补充损失的动能，则可保持在相近的高度上下运行，完成持续的“下行上爬”的玩法．

“睡眠”和“唤醒”则体现了平动和转动的相互转化．在第二代溜溜球结构中，空轴 B 的质量和动能远低于 A，B 在下行过程中受缠紧的细绳的约束，但细绳末端是空套在 B 上的，而 A 通过轴承与 B 连接．达到底部后，平动动能也转化为转动动能，B 在细绳末端的套结中转动，A 在 B 中转动，轴承均匀光滑，A 的转动速度高于 B，转动中的摩擦阻力小于 B，当 B 停止转动后 A 还能持续转动较长时间，溜溜球处于“睡眠”状态．在“睡眠”中，手指向上轻轻抖动，产生向上的初速度，溜溜球将迅速向上回收，这个“唤醒”过程触发了转动动能向平动动能的转化．而溜溜球的前抛、遛狗、爬行、猴子上树等玩法中，有更多平动和转动相互转化的现象．

4　斜坡滚动圆盘与溜溜球运动的相似性

从角度为 θ 的斜坡顶点由静止开始释放均匀圆盘，圆盘沿斜面向下滚动，圆盘半径为 r，质量为 m，斜坡高度为 h，如图 4 所示．圆盘在滚动的过程中受重力 G，斜面支持力 N 和摩擦力 f，滚动速度为 ω，圆盘质心的线速度为 v_C，质心的加速度为 a_C，圆盘角加速度为 a_r，则同样有 $\omega = v_C r$，由于转动方向的切向速度与质心速度相反，所以 $a_C = -r a_r$．

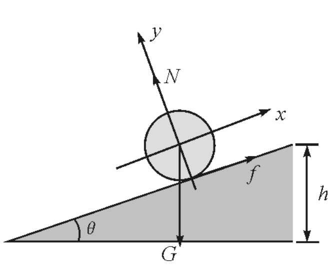

图 4　圆盘沿斜坡滚动示意图及受力分析

重力沿 y 轴的分量与支持力平衡，沿 x 轴有

$$f - mg\sin\theta = m a_C \tag{9}$$

由转动定律

$$fr = I a_r = -\frac{a_C I}{r}$$

得

$$f = -\frac{a_C I}{r^2} \tag{10}$$

$$a_C = -\frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{I}{m r^2}} \tag{11}$$

其中负号表示加速度方向沿 x 轴负方向．比较式(10)、(11) 和式(5)、(6)，当 $\theta = 90^\circ$ 时，在数值上相等(忽略 x 轴方向设定)．

可见，圆盘的斜坡滚动与溜溜球的下行运动非常相似，溜溜球在水平方向不受力，而斜坡运动在垂直与斜面方向平衡，导致转动的力矩分别为细绳拉力和斜坡摩擦力，而受力分析、运动过程和运动参数则雷同．斜坡长度

$$l = \frac{h}{\sin\theta}$$

运动到斜坡底部的时间

$$t = \sqrt{\frac{-2h}{a_C \sin\theta}}$$

速度

$$v_C = a_C t = \sqrt{\frac{-2a_C h}{\sin\theta}}$$

代入式(11) 化简后得到总动能为

$$\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2 = mgh$$

可见斜坡滚动圆盘的机械能也守恒．

5　结论

溜溜球的运动过程中包含了平动和转动，体现了平动动能、转动动能和重力势能的相互转化．论文讨论了溜溜球的结构和常见运动，从平动物体的动能导出了均匀圆环和圆盘的转动动能，借助转动运动学中的转动惯量和转动定律，证明了溜溜球的运动过程中机械能守恒．对斜坡滚动圆盘的分析表明，溜溜球的下行运动与之相似，再次体现了两种动能和重力势能的转化，以及转化过程中的机械能守恒．

参 考 文 献

1　郑俊，肖发新．溜溜球的力学原理．物理教师，2005(2)：45

2　杨全民．溜溜球的力学原理及运动过程分析．连云港师范高等专科学校学报，2001(2)：72 ～ 74

3　漆安慎，杜婵英．普通物理学教程：力学(第三版)．北京：高等教育出版社，2012．170