

关于金属丝的电阻:一个结论的证明和应用

梁继鲁 代建山 李军伟 王 云 李 洋

(博乐市高级中学 新疆 博乐 833400)

(收稿日期:2016-04-29)

摘 要:讨论了金属丝电阻的一个性质并给了证明及应用.

关键词:金属丝 电阻 证明

将同质量(同体积)的两块同种金属材料制成两根电阻丝,这两根电阻丝长度相同,一根粗细均匀(各处横截面积一样),阻值为 R_0 ;另一根粗细不均匀,阻值为 R ,则有: $R > R_0$,以下给出证明.

1 讨论导线由两部分组成

设 R 是由两段粗细均匀、横截面不一样而长度相同的电阻丝串联而成,如图 1 所示.



图 1

设这两部分长度都为 L ,横截面积分别为 S_1 和 S_2 . 电阻丝的总电阻

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\rho L}{S_1} + \frac{\rho L}{S_2} = \frac{\rho L^2}{S_1 L} + \frac{\rho L^2}{S_2 L}$$

设第一段、第二段电阻丝的体积分别为 V_1 和 V_2 ,则有

$$V_1 = LS_1 \quad V_2 = LS_2$$

此时有

$$R = \frac{\rho L^2}{V_1} + \frac{\rho L^2}{V_2} = \rho L^2 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = \rho L^2 \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}$$

设电阻丝的总体积为 V ,有

$$V = V_1 + V_2$$

$$R = \frac{\rho L^2 V}{V_1 V_2}$$

现将这个金属电阻丝锻打加工,在总长度不变的前提下将金属电阻丝锻压使其各处粗细均匀(横截面积一样).如图 2 所示,在这个加工的过程中,整个金属丝的总积 $V = V_1 + V_2$ 保持不变(即 R 表达式中分子不变),而分母中 V_1 和 V_2 是两个正数,加工过程中是两个变量.



图 2

根据数学中的重要不等式:两个正数的和不变,当这两个正数相等时其乘积最大.

在本问题中, $V_1 + V_2$ 是恒量,当 $V_1 = V_2$ 时, V_1 和 V_2 乘积最大.

由 $V_1 = V_2$, L 相同,可得 $S_1 = S_2 = S_0$ (即两根电阻丝一样粗).

此时 $V = V_1 + V_2 = 2LS_0$; $V_1 \cdot V_2 = (LS_0)^2$;

对表达式 $R = \frac{\rho L^2 V}{V_1 V_2}$ 而言,分子不变,分母中 V_1 和 V_2 分别在变,当分母 $V_1 \cdot V_2$ 最大时, R 最小. 最小值为

$$R_0 = \frac{\rho L^2 V}{V_1 V_2} = \frac{\rho L^2 2LS_0}{(LS_0)^2} = \frac{2\rho L}{S_0}$$

由此证明:由两根横截面不同(粗细不均匀)的等长的同种金属材料制成的电阻丝的阻值大于总长度、总体积相同的同种材料制成的粗细均匀电阻丝的电阻(运用二次函数求极值也可得出相同的结论).

2 讨论一般情况

将一根粗细不均匀的金属电阻丝 $2N$ 等分(N 充分大),其阻值依次为 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{2N}$. 将这 $2N$ 个电阻丝依次按两份一组分成 N 个小组.

此时电阻丝的总电阻为 R ,有

$$R = (R_1 + R_2) + (R_3 + R_4) + \dots + (R_{2N-1} + R_{2N})$$

(1) 对每一个小组的金属电阻丝进行锻压,使其在长度、体积不变的前提下变成粗细均匀的电阻丝. 根据前面的结论,每一小组的总电阻将变小. 所

以将这 N 组电阻丝全部改造后,整根电阻丝的总电阻将减小,同时整根电阻丝的粗细差别将减小.

(2) 将(1)所述的改造工作一次又一次地进行,电阻丝的总电阻一次又一次地减小,整根电阻丝的粗细差别一次又一次地减小.

(3) 当改造的次数 n 充分大后,原来的电阻丝就改造成粗细均匀总长度不变的电阻丝.总电阻就变为最小.

原命题得以证明.

3 应用

【题目】如图 3 所示,水平地面上方矩形区域内存在垂直纸面向里的匀强磁场,在磁场正上方有两个边长相等、质量不等的相同材料制成的单匝闭合正方形线圈 I 和 II.线圈 I 粗细均匀,线圈 II 粗细不均匀.两线圈从同一高处由静止开始自由下落,进入磁场后最后落在地面.运动过程中,线圈平面始终保持在竖直平面内且下边缘平行于磁场上边界.整个运动过程中通过线圈 I 和 II 导线的横截面的电荷量分别为 q_1 和 q_2 ,运动时间分别为 t_1 和 t_2 .不计空气阻力,则

- A. q_1 和 q_2 可能相等
- B. q_1 一定大于 q_2
- C. t_1 与 t_2 可能相等
- D. t_1 一定大于 t_2

(参考答案:A,D)

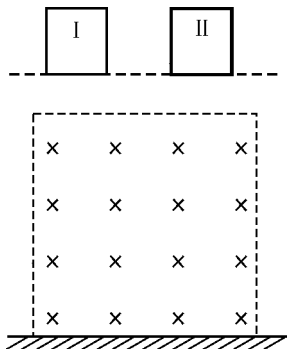


图 3

解答:现只讨论选项 C 和选项 D.

我们引进一个假想的线圈 III,以它做媒介,让它分别与线圈 I 和线圈 II 做比较,最终得出相应的结论.

设线圈 III 与线圈 II 材料、长度、质量完全一样

且粗细均匀.当线圈 I 和线圈 III 两线圈从同一高处由静止开始自由下落,进入磁场后最后落在地面,则它们的运动时间是相同的.证明如下:

设线圈刚进入磁场时所受的安培力小于重力.此时

$$F_{\text{安}} = BLI = \frac{B^2 L^2 V_0}{R}$$

根据牛顿第二定律有

$$mg - \frac{B^2 L^2 V_0}{R} = ma$$

因此

$$a = g - \frac{B^2 L^2 V_0}{mR}$$

而

$$mR = \frac{\rho_{\text{密度}} 4LS \rho_{\text{电阻率}} 4L}{S} = 16\rho_{\text{密度}} \rho_{\text{电阻率}} L^2$$

因此

$$a = g - \frac{B^2 L^2 V_0}{16\rho_{\text{密度}} \rho_{\text{电阻率}} L^2} = g - \frac{B^2 V_0}{16\rho_{\text{密度}} \rho_{\text{电阻率}}}$$

从上面的讨论可看出,线圈 I 和线圈 III 进入磁场的过程中初始加速度、初速度、位移都一样,它们的速度变化规律一样,所以它们进入磁场的时间一样,进入磁场后的运动时间一样.

再来讨论线圈 II 和线圈 III.

线圈 II 和线圈 III 的材料、质量、总长度一样,线圈 II 的横截面粗细不均匀而线圈 III 的粗细是均匀的.由前面讨论的结论可知, $R_{\text{II}} > R_{\text{III}}$,根据前面的讨论,线圈刚进入磁场时, $a = g - \frac{B^2 L^2 V_0}{mR}$,由此式可得出:线圈 II 的加速度 a_{II} 大于线圈 III 的加速度 a_{III} .所以线圈 II 进入磁场的时间小于线圈 III 的时间;又线圈 III 的时间等于线圈 I 的时间,所以线圈 II 的时间小于线圈 I 的时间,即 t_1 一定大于 t_2 ,选项 D 正确.

更正

2016年第7期第97页《阿拉果铜盘实验的实验研究与分析》一文,收稿日期为2016年3月4日,特此更正.