利用直角坐标系分析一道力学竞赛题

马婧艺

（江苏省海门中学　江苏 南通　226100）

（收稿日期:2016-05-03）

文献[1]中有一道考查建模能力的动量和能量的竞赛题,试题及解析如下.

【题目】一静止的物块爆炸成质量相等的3个碎片1,2,3,设爆炸中释放的总动能为一定值E_0,但每一个碎片具有的动能有多种可能值,设他们分别为E_{k1},E_{k2},E_{k3},现可以用高为E_0的正三角形中的一个点P对三条边所引的垂延的长度来表示E_{k1},E_{k2},E_{k3},但并不是三角形中的每一点所对应的3个动能都是物理上所允许的,物理上允许的P点可能存在的区域称为运动学允许区,试求此允许区的范围.

解析:如图1所示,以正三角形$\triangle ABC$的中心O点为极点,建立极坐标系.

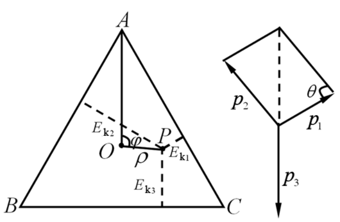

图1

令$\angle AOP=\varphi$,$\overline{OP}=\rho$,设3个碎片动量分别为$\boldsymbol{p}_1$,$\boldsymbol{p}_2$,$\boldsymbol{p}_3$,在动量守恒$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3=0$的矢量图中可以得出$\boldsymbol{p}_1$,$\boldsymbol{p}_2$,$\boldsymbol{p}_3$的数值关系为

$$p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\cos\theta=p_3^2 \tag{1}$$

将$E_1=\dfrac{p_1^2}{2m}$,$E_2=\dfrac{p_2^2}{2m}$,$E_3=\dfrac{p_3^2}{2m}$,代入式(1)得

$$E_1+E_2-2\sqrt{E_1E_2}\cos\theta=E_3$$

$$\cos\theta=\frac{E_1+E_2-E_3}{2\sqrt{E_1E_2}} \tag{2}$$

由$\cos^2\theta\leqslant 1$可得

$$(E_1+E_2-E_3)^2\leqslant 4E_1E_2 \tag{3}$$

现在用极坐标来表示3个能量

$$E_1=\frac{1}{3}E_0-\rho\cos(\varphi-60^\circ) \tag{4}$$

$$E_2=\frac{1}{3}E_0-\rho\cos(\varphi+60^\circ) \tag{5}$$

$$E_3=\frac{1}{3}E_0+\rho\cos\varphi \tag{6}$$

将式(4)、(5)、(6)代入式(3)

$$\left(\frac{1}{3}E_0-2\rho\cos\varphi\right)^2\leqslant$$

$$4\left[\frac{1}{9}E_0^2-\frac{1}{3}E_0\rho\cos\varphi+\rho^2\cos(\varphi+60^\circ)\cos(\varphi-60^\circ)\right]$$

化简可得

$$\rho\leqslant\frac{E_0}{3}$$

说明物理上许可区为以正三角形重心O为圆心半径为$\dfrac{E_0}{3}$的圆,正好是正三角形的内切圆.

评析:从试题内容可以看出这是一道能够有效考查学生提取有效信息、运用物理原理分析问题、建立数学模型等综合能力的试题,难度很大;试题解析运用极坐标系、三角函数、不等式等知识对问题进行了巧妙的分析,但是,若考虑到高中生的运用数学知识处理物理问题的实际能力,用极坐标系分析本题不易让学生理解和掌握,为了更好地符合高中生的认知能力,下面在直角坐标系中对本题进行分析求解.

直角坐标系中的解析:如图2所示,以正三角形$\triangle ABC$的B点为坐标原点,BC边为x轴,垂直BC边向上为y轴,建立直角坐标系xBy,设P点的坐标为$P(x_P,y_P)$,只需要找到x_P与y_P间满足的数学关

系式，就可以确定 P 点对应的区域.

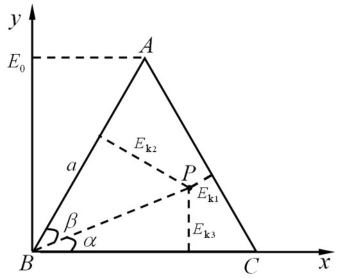

图 2

由题意知正 $\triangle ABC$ 的高为 E_0，设正 $\triangle ABC$ 的边长为 a，则有

$$E_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

过 P 点到正 $\triangle ABC$ 三边的垂线段长度分别为 E_{k1}，E_{k2}，E_{k3}，利用正三角形的面积

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} + S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC}$$

即

$$\frac{1}{2}aE_0 = \frac{1}{2}aE_1 + \frac{1}{2}aE_2 + \frac{1}{2}aE_3$$

可以证明

$$E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} = E_0 \tag{7}$$

在图 2 中，有如下几何关系成立

$$E_{k3} = y_P$$

$$\sin\alpha = \frac{y_P}{\overline{BP}} = \frac{E_{k3}}{\overline{BP}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_P}{\overline{BP}}$$

$$\beta = 60^\circ - \alpha$$

$$\sin\beta = \sin(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{E_{k2}}{\overline{BP}}$$

得出

$$E_{k2} = \overline{BP}\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BP}\cos\alpha - \frac{1}{2}\overline{BP}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}x_P - \frac{1}{2}y_P$$

再结合式(7) 得出

$$E_{k1} = E_0 - E_{k2} - E_{k3} = E_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_P - \frac{1}{2}y_P$$

分析出 E_{k1}，E_{k2}，E_{k3} 与 P 点坐标关系为

$$E_{k3} = y_P$$

$$E_{k2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_P - \frac{1}{2}y_P$$

$$E_{k1} = E_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_P - \frac{1}{2}y_P \tag{8}$$

由动量守恒 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 0$ 的矢量图可知，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 的数值满足下列关系 $p_1 \leqslant p_2 + p_3$，结合动量与动能关系 $p = \sqrt{2mE_k}$，得出

$$\sqrt{2mE_{k1}} \leqslant \sqrt{2mE_{k2}} + \sqrt{2mE_{k3}} \tag{9}$$

将式(8) 代入式(9) 得

$$\sqrt{2\left(E_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_P - \frac{1}{2}y_P\right)} \leqslant \sqrt{2y_P} + \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_P - \frac{1}{2}y_P\right)}$$

化简整理得

$$\left(x_P - \frac{\sqrt{3}}{3}E_0\right)^2 + \left(y_P - \frac{1}{3}E_0\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{3}E_0\right)^2$$

得出 P 点所在区域是以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}E_0, \frac{1}{3}E_0\right)$ 为圆心，$\frac{1}{3}E_0$ 为半径的圆形区域，即为 $\triangle ABC$ 的内切圆.

小结：通过对比以上两种坐标系中试题解析可以看出，直角坐标系中的解析较为通俗易懂，更加符合高中生的认知能力，便于学生理解和掌握，应该作为本试题的基础解法，极坐标系中的解析适合作为补充解法，两种研究思路相结合可以起到提升思维能力、拓宽研究视野的效果.

参考文献

1　张大同. 通向金牌之路 —— 高中物理竞赛辅导讲义. 杭州：浙江大学出版社，130 ～ 131