



不同参考系下的相对论多普勒效应

——求解第32届全国中学生物理竞赛复赛第4题

郁林富

(宁波市镇海中学 浙江 宁波 315200)

(收稿日期:2016-05-06)

摘要:基于相对论速度变换和同一直线上相对论多普勒效应,给出了在接收者系下,运动方向与位移连线不在同一直线上的相对论多普勒效应的频率变换公式.

关键词:多普勒效应 相对论 竞赛

第32届全国中学生物理竞赛复赛第4题解析非常复杂,让一般的同学望而却步,在此结合相对论多普勒效应给出新的思路,避开了多次近似,大大降低了题目计算难度,更有利于竞赛推广.

1 一维方向上的多普勒效应

(1) 接收者静止,光源以 u_s 向接收者靠近

如图1所示,实验系(接收者系)为 S 系,光源系为 S' 系,设 S' 系中光的频率为 ν_0 ,则其周期 $T_0 =$

$$\frac{1}{\nu_0}.$$

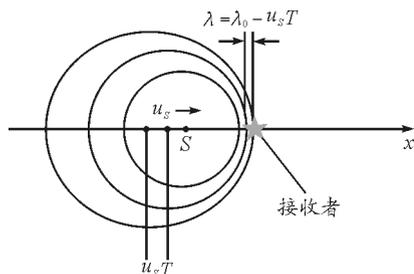


图1 接收者静止,光源向接收者靠近

根据相对论效应其在 S 系中的周期

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_s}{c}\right)^2}}$$

所以在 S 系中的波长

$$\lambda = \lambda_0 - u_s T = cT - u_s T$$

接收者系接收到的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + \frac{u_s}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{u_s}{c}}} \nu_0$$

(2) 光源静止,接收者以 u_0 向光源靠近

如图2所示,接收者为 S' 系,实验系为 S 系(光源系),设 S 系中光的频率为 ν_0 ,为了得到接收者在接收者系的频率,光源的速度利用相对论速度变换公式转换到接收者参考系中.

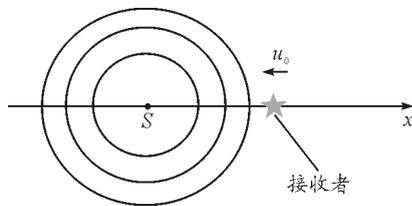


图2 光源静止,接收者向光源靠近

此时光源的速度为

$$u'_s = u_{s'r'} = \frac{u_{sr} - (-u_0)}{1 - \frac{u_{sr}(-u_0)}{c^2}} = \frac{0 - (-u_0)}{1 - \frac{0 \cdot (-u_0)}{c^2}} = u_0$$

在接收者为 S' 系看来光源以 u_0 在靠近,同(1)可得此时接收者接收到的频率

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \frac{u_0}{c}}{1 - \frac{u_0}{c}}} \nu_0$$

(3) 光源以 u_s ,接收者以 u_0 相互靠近

接收者为 S' 系,实验系为 S 系(光源在 S 中以

u_s 运动), 此时光源在 S' 系的速度为

$$u'_s = \frac{u_s - (-u_0)}{1 - \frac{u_s(-u_0)}{c^2}} = \frac{u_s + u_0}{1 + \frac{u_s u_0}{c^2}}$$

在接收者为 S' 系看来光源以 $u'_s = \frac{u_s + u_0}{1 + \frac{u_s u_0}{c^2}}$ 在

靠近, 同(1) 可得此时接收者接收到的频率

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \frac{u_s}{c}}{1 - \frac{u_s}{c}}} \nu_0 = \sqrt{\frac{1 + \frac{u_s + u_0}{c + \frac{u_s u_0}{c}}}{1 - \frac{u_s + u_0}{c + \frac{u_s u_0}{c}}}} \nu_0$$

2 二维方向上的多普勒效应

(1) 接收者静止, 光源以 u_s 运动

如图 3 所示, 实验系为 S 系, S 系中夹角为 θ , 光源系为 S' 系, S' 系中光的频率为 ν_0 , 则其周期 $T_0 =$

$$\frac{1}{\nu_0}.$$

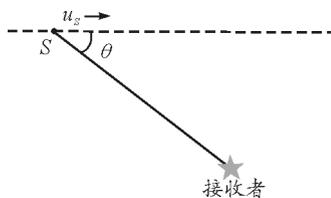


图 3 接收者静止, 光源沿直线运动且与观察者连线成 θ 角

根据相对论效应其在 S 系中的周期

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_s}{c}\right)^2}}$$

将 u_s 投影到连线上

$$u_s \cos \theta$$

所以在 S 系中的波长

$$\lambda = \lambda_0 - u_s T \cos \theta = cT - u_s T \cos \theta$$

接收者接收到的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u_s}{c}\right)^2}}{1 - \frac{u_s}{c} \cos \theta} \nu_0$$

(2) 光源静止, 接收者以 u_0 运动

如图 4 所示, 接收者为 S' 系, 实验系为 S 系, 设 S 系中光的频率为 ν_0 , 夹角为 θ .

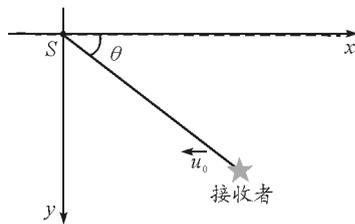


图 4 光源静止, 接收者沿直线运动且与光源连线成 θ 角

此时光源在 S' 系的速度为

$$u'_s = u_{s'} = \frac{u_{s'} - (-u_0)}{1 - \frac{u_{s'}(-u_0)}{c^2}} = \frac{0 - (-u_0)}{1 - \frac{0 \cdot (-u_0)}{c^2}} = u_0$$

原本光速沿 x, y 两方向的分量分别为

$$u_x = c \cos \theta \quad u_y = c \sin \theta$$

由速度变换公式, 在 S' 系中光速的两个分量分别为

$$u'_x = \frac{u_x - (-u_0)}{1 - \frac{u_x(-u_0)}{c^2}} = \frac{\cos \theta + \frac{u_0}{c}}{1 + \frac{u_0}{c} \cos \theta} c$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \left(\frac{-u_0}{c}\right)^2}}{1 - \frac{u_{s'}(-u_0)}{c^2}} = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{c}\right)^2}}{1 + \frac{u_0}{c} \cos \theta} c$$

则在 S' 系中, 来自银河系边缘的光的速度方向与 x' 轴的夹角为 θ' , 有

$$\cos \theta' = \frac{u'_x}{\sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2}} = \frac{\cos \theta + \frac{u_0}{c}}{1 + \frac{u_0}{c} \cos \theta}$$

S' 系中接收者接收到的频率

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u_s}{c}\right)^2}}{1 - \frac{u_s}{c} \cos \theta'} \nu_0 =$$

$$\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{c}\right)^2}}{1 - \frac{u_0}{c} \cos \theta'} \nu_0 =$$

$$\frac{1 + \frac{u_0}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{c}\right)^2}} \nu_0$$

(3) 光源以 u_s 运动, 接收者以 u_0 运动

如图 5 所示, 接收者为 S' 系, 实验系为 S 系(光源在 S 中以 u_s 运动), 此时光源在 S' 系的速度为

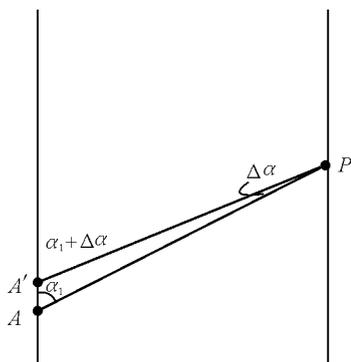


图7 解题的题图

其中

$$\Delta\alpha \approx \frac{\overline{AA'} \sin \alpha_1}{AP} = \frac{v\Delta t \sin \alpha_1}{c \frac{\Delta t}{2}} = \frac{2v \sin \alpha_1}{c}$$

所以

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha) = \\ &= \cos \alpha_1 \cos \Delta\alpha - \sin \alpha_1 \sin \Delta\alpha \approx \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

所以飞机接收到的频率可变为

$$f_{A'} = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_1} f_0$$

频率差值为

$$f_D = f_{A'} - f_0 = \frac{2 \frac{v}{c} \cos \alpha_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_1} f_0 \approx$$

$$2 \frac{v}{c} f_0 \cos \alpha_1 + 2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \cos \alpha_1 \approx 2 \frac{v}{c} f_0 \cos \alpha_1$$

其中

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_P - x_A}{\sqrt{R_0^2 + (x_P - x_A)^2}}$$

即 α_1 为从机载雷达射出的光线与飞机航线之间的夹角。

注:本题中所求频率差均为飞机上的观察者观察得到,若题干中的飞机发射频率 f_0 为地面系中的参数,则可先将地面上的频率变为飞机上的观察者系中的频率,求解后再逆变换回地面参考系频率,由于两次变化都乘除相同系数,所以两次变换所得结果在地面系中观察到飞机接收到的频率也为

$$f_{A'} = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha_1} f_0$$

3 结束语

近年来竞赛加分取消,但拔尖高校对竞赛生的偏好没有降低,在高校自主招生中竞赛生优势依旧明显,除了北京大学、清华大学以外,其他的一流10校基本都要求考生为省一等奖,特别是C9高校,如,上海交通大学、中国科技大学、浙江大学等高校.其他高校天津大学、南开大学等都要求省一等奖.全国物理竞赛新大纲中没有相对论多普勒效应,但掌握相对论多普勒效应对全国物理竞赛带来很大的帮助,可谓站在高山顶上往下看往往能看到上山的最佳路线。

参考文献

- 1 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程·力学.北京:高等教育出版社,2004.364~374
- 2 黎永光.相对论能量——动量变换关系式与光波的多普勒效应.武汉工业学院学报,1999(3):93~96

The Relativistic Doppler Effect under Different Reference Frame

—Solution of Question 4 in the 32nd Chinese Physics Competition

Yu Linfu

(Zhenhai High School, Ningbo, Zhejiang 315200)

Abstract: Based on the relativistic Doppler effect in the same line and Relativistic velocity transformation, the relativistic Doppler effect frequency conversion formula, which can be used in the condition that motion direction and displacement of the connection is not in the same line in different reference frames.

Key words: doppler principle; the theory of relativity; competition