一道经典力学题的改编与题后思考

王建忠

（江苏省启东中学　江苏 南通　226200）

（收稿日期：2016－05－19）

1　经典题及解析

如图1，质量分别为 m_A 和 m_B 的两物块，连结在一轻弹簧两端，并将 B 放在水平面上. 系统平衡后，在 A 上作用一方向竖直向下的力 F，缓慢向下压 A，某时刻撤去 F，要求撤去 F 后，A 反弹能将 B 提起，求撤去前 F 的最小值. 弹簧始终在弹性限度内.

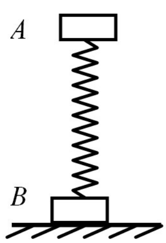

图 1

解法 1：利用能量关系定量求解

缓慢向下压 A，可认为过程中 A 处于平衡状态. 设 F 撤去前，力 F 的大小为 F_1，弹簧压缩量为 x_1，对物块 A，由力平衡条件，有

$$F_1 + m_A g = \kappa x_1 \tag{1}$$

式中，κ 为弹簧的劲度系数. 以弹簧原长位置为重力势能的零点，则 F 撤去前系统的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}\kappa x_1^2 - m_A g x_1$$

F 撤去后，弹簧要恢复形变，物块 A 上升，设物块 A 上升到最高点时弹簧的伸长量为 x_2，此时系统的机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2}\kappa x_2^2 + m_A g x_2$$

撤去 F 至物块 A 上升到最高点过程，系统机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}\kappa x_1^2 - m_A g x_1 = \frac{1}{2}\kappa x_2^2 + m_A g x_2$$

即

$$\kappa x_1^2 - 2m_A g x_1 - \kappa x_2^2 - 2m_A g x_2 = 0$$

得

$$x_1 = \frac{m_A g \pm (kx_2 + m_A g)}{\kappa}$$

因为 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，所以，有

$$x_1 = \frac{2m_A g + \kappa x_2}{\kappa} \tag{2}$$

要能提起物块 B，临界情况是

$$\kappa x_2 = m_B g \tag{3}$$

联立式(1)～(3)，得

$$F_1 = (m_A + m_B) g$$

解法 2：利用振动模型定性半定量分析

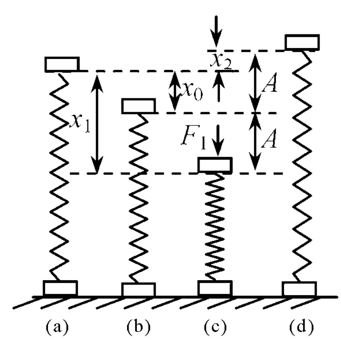

图 2

如图 2，状态(a)、(b)、(c)、(d) 分别是弹簧的原长状态、系统的原平衡状态、压 A 的力 F_1 撤去前的状态、F_1 撤去后 A 到达最高点的状态. 图 2 中的 x_0 与 x_1 分别由下式决定

$$\kappa x_0 = m_A g$$

$$\kappa x_1 = F_1 + m_A g$$

F_1 撤去后 A 做简谐振动，其振幅为

$$A = x_1 - x_0$$

由振动的对称性，物块 A 到达最高点时，弹簧的伸长量为

$$x_2 = A - x_0 = x_1 - 2x_0$$

要能提起物块 B，临界情况是

$$\kappa x_2 = m_B g$$

得

$$F_1 = (m_A + m_B)g$$

2　改编题及解析

如图 1,质量分别为 m_A 和 m_B 的两物块,连结在一轻弹簧两端,并将 B 放在水平面上.系统平衡后,在 A 上作用一个方向竖直向下、大小恒定的力 F,A 到达最低位置时撤去 F,要求 A 反弹能将 B 提起,求 F 的最小值.弹簧始终在弹性限度内.

解法 1:利用能量关系定量求解

以弹簧原长位置为重力势能的零点,恒力 F 作用前系统的机械能为

$$E_0 = \frac{1}{2}\kappa x_0^2 - m_A g x_0 \tag{4}$$

式中 x_0 为 F 作用前弹簧的压缩量

$$\kappa x_0 = m_A g \tag{5}$$

设恒力 F 使物块 A 由原平衡位置向下移动距离 x_1,则 F 撤去前系统的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}\kappa\ (x_0 + x_1)^2 - m_A g\,(x_0 + x_1) \tag{6}$$

由功能原理,F 做的功等于系统增加的机械能,有

$$F x_1 = E_1 - E_0 \tag{7}$$

联立式(4)～(7)可得

$$F = \frac{1}{2}\kappa x_1 \tag{8}$$

撤去 F 后,弹簧要恢复形变,物块 A 上升,设物块 A 上升到最高点时弹簧的伸长量为 x_2,此时系统的机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2}\kappa x_2^2 + m_A g x_2$$

撤去 F 至物块 A 上升到最高点过程,系统机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}\kappa\ (x_0 + x_1)^2 - m_A g\,(x_0 + x_1) = \frac{1}{2}k x_2^2 + m_A g x_2 \tag{9}$$

要能提起物块 B,临界情况是

$$\kappa x_2 = m_B g \tag{10}$$

联立式(8)～(10),可得 F 的最小值为

$$F_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)g \tag{8}$$

解法 2:利用振动模型定性半定量分析

对 A 作用了恒力 F 之后,若 F 始终作用在 A 上,则 A 在竖直方向做简谐振动,振动平衡位置在 A 原静止位置下方 $\frac{F}{\kappa}$ 处,简谐振动的振幅即为 $\frac{F}{\kappa}$,A 原静止位置即为振动的最大位移处,此时 A 受到的合力大小为 F,方向竖直向下.由对称性可知,A 振动到最低点时受的合力大小为 F,方向竖直向上,在这一位置撤去 F 后,A 在该位置受的合力大小为 $2F$,方向竖直向上,之后 A 以原静止位置为平衡位置在竖直方向做简谐振动,根据简谐振动的对称性,振动到最高点时,A 受的合力大小为 $2F$,方向竖直向下.设此时弹簧对 A 的拉力大小为 F_κ,则

$$2F = m_A g + F_\kappa$$

要提起 B,须满足

$$F_\kappa \geqslant m_B g$$

即

$$F \geqslant \frac{1}{2}(m_A + m_B)g$$

则 F 的最小值为

$$F_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)g$$

3　题后思考

数学家乔治·波利亚说:“数学问题的解决仅仅只是一半,更重要的是解题之后的回顾”.物理问题同样如此.相同的装置,为什么缓慢压缩与用恒力压缩,撤去压力后 A 反弹同样将物块 B 提起,所用的最小力相差一倍呢?

从能量角度定性半定量分析,能提起物块 B,两种情形弹簧末状态的伸长量是一样的,弹簧的弹性势能相同,恰好能提取 B 的临界状态时,物块 A 的高度相同,两种情形系统的机械能相同.撤去压力后 A 反弹的过程中系统的机械能是守恒的,这就是说,撤去压力前,系统的机械能是相同的,弹簧的形变量相同,从作用 F 到撤去 F 过程,压缩过程中物块 A 的位移 x 相同.系统机械能的增加,源于作用在 A 的力对系统所做的功,因此,两种情况下作用在 A 的力对系统所做的功相同.缓慢压缩时,作用在 A 上压力的 F 大小与 A 的位移成正比,过程中压力 F 所做的功为

$$W = \bar{F}x = \frac{0 + F_1}{2}x$$

(下转第 90 页)

式中 $l=d-x$.

而此时弹簧的弹力为 $F'=\kappa' x$，与极板间的静电引力平衡，即

$$\kappa' x \approx \frac{\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}\cdot U_x^2$$

则

$$U_x^2=\frac{2\kappa' x(d-x)^2}{\varepsilon_0 S}=\frac{2\kappa' x(d-x)(d-x)}{\varepsilon_0 S}$$

由于 $2x+(d-x)+(d-x)=2d$ 为常数，利用均值不等式可知，仅当 $2x=(d-x)=(d-x)$ 时，即 $x=\frac{d}{3}$ 时，电压最大.所以电压最大值为

$$U_{\max}=\sqrt{\frac{8\kappa' d^3}{27\varepsilon_0 S}}=\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{2\kappa' d}{3\varepsilon_0 S}}$$

实际上，总能量都是由电源提供的，其中一半能量转化为电容器的静电能，另一半能量使极板发生移动，转化为弹簧的弹性势能.

解法 2：假设在静电力作用下，极板发生微小位移 Δx，则克服弹簧的弹力所做的功即静电引力做的功为 $W=F\cdot\Delta x$.

由于电容器空间减少的体积为 $V=S\cdot\Delta x$，则由能量密度公式 $\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 可知减少的静电能为

$$\Delta E=\omega V\approx\varepsilon_0\frac{S\cdot\Delta x}{2}\left(\frac{U}{l}\right)^2$$

二者在数量上相等，即 $W=\Delta E$，可得

$$F\approx\frac{\varepsilon_0 S}{2l^2}\cdot U^2$$

在上述两种解法中，若利用电容器的静电能公式计算，则静电能增加量为

$$\Delta E_1\approx\frac{\varepsilon_0 S\cdot\Delta x}{2l^2}\cdot U^2$$

若利用能量密度公式计算，则静电能减少量为

$$\Delta E=\omega V\approx\frac{S\cdot\Delta x}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{l}\right)^2$$

那么二者是否发生矛盾呢？其实不然，因为前者静电能的增加量是指储存在电容器中的静电能，是电源给电容器充电的结果；而后者静电能的减少量是指电磁系统损失的静电能，不是储存在电容器中，而是从电磁系统转移到弹簧中去了，是极板间的静电引力做功的结果.静电引力做多少功，电场能就减少多少，弹簧的弹性势能就增加多少，或者说电源放出 2 倍的能量转化为电容器的静电能，其中一半储存在电容器中，另一半用来克服弹簧弹力做功，转化为弹性势能.

参考文献

1　物理学难题选登 V.物理通报，2007(11)：33
2　物理学难题选登 V 解答.物理通报，2007(12)：38
3　杨国平.虚功原理.数理天地，2006(3)
4　杨国平.物理解题中的极值方法.物理通报，2012(4)：56

（上接第 84 页）

用恒力 F_2 压 A 时，恒力 F_2 做的功为

$$W=F_2 x$$

所以

$$F_1=2F_2$$

从动力学角度定性半定量分析，缓慢压缩 A 时，压缩过程是准静态过程，可认为物块 A 处于受力平衡状态，撤去 F 前，有

$$F_1+m_A g=F_\kappa \tag{11}$$

式中 F_κ 是撤去 F 前弹簧的弹力.

由前面的分析知，两种情形撤去压力前，弹簧的形变量相同，弹簧的弹力相同.用恒力 F_2 压缩 A 时，物块 A 做简谐振动，由简谐振动的对称性知，刚作用 F_2 时与撤去 F_2 前，分别对应物块 A 振动的上、下最大位移位置，物块 A 的加速度大小相同，有

$$F_2=m_A a \tag{12}$$

$$F_\kappa-m_A g-F_2=m_A a \tag{13}$$

联立式(11)～(13)，得

$$F_1=2F_2$$

物理习题既是加深和扩展物理知识，促进知识向能力转化的重要载体，又是物理与社会链接的文化桥梁.物理习题教学是物理教学的有机组成部分，在培养学生分析问题和解决问题能力方面具有不可替代的作用.编制习题是教师的基本功之一，改造旧题是中学教师编题的常用方法.抓住典型问题，一题多变，一题多解，题后思考，不仅可以提升学生的物理思想、迁移物理方法，使学生加深对物理概念、规律的理解，开阔学生的思路，提高分析问题和解决问题的能力，培养和发挥学生的创造性，有利于在原有基础上建立更高层次的认知结构，而且可以提升教师的教学研究能力，实现教学相长.

参考文献

1　王建忠.物理教学中要注重定性分析能力的培养.物理教学，2007(9)