对 2016 年高考四川卷物理压轴题的研究

陈世豪

（蓬安县蓬安中学 四川 南充 637800）

（收稿日期：2016－06－19）

摘 要：结合在学生犯错案例，就2016年高考四川卷物理压轴题进行了探讨，为以后物理教学的改进找准了方向，进一步分析了该题所给参考答案的一些瑕疵.

关键词：高考四川卷 压轴题 物理

笔者刚刚结束高三的教学任务，搜集到2016年的四川物理卷压轴题如下.

【题目】 如图1所示，图面内有竖直线 DD'，过 DD' 且垂直于图面的平面将空间分成 Ⅰ，Ⅱ 两区域. 区域 Ⅰ 有方向竖直向上的匀强电场和方向垂直图面的匀强磁场 B（图中未画出）；区域 Ⅱ 有固定在水平地面上高 $h=2l$，倾角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 的光滑绝缘斜面，斜面顶端与直线 DD' 距离 $s=4l$，区域 Ⅱ 可加竖直方向的大小不同的匀强电场（图中未画出）；C 点在 DD' 上，距地面高 $H=3l$. 零时刻，质量为 m，带电量为 q 的小球 P 在 K 点具有大小 $v_0=\sqrt{gl}$，方向与水平面夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 的速度，在区域 Ⅰ 内做半径 $r=\frac{3l}{\pi}$ 的匀速圆周运动，经 C 点水平进入区域 Ⅱ. 某时刻，不带电的绝缘小球 A 由斜面顶端静止释放，在某处与刚运动到斜面的小球 P 相遇. 小球视为质点，不计空气阻力及小球 P 所带电荷量对空间电磁场的影响. l 已知，g 为重力加速度.

（1）求匀强磁场的磁感应强度 B 的大小；

（2）若小球 A 和 P 在斜面底端相遇，求释放小球 A 的时刻 t_A；

（3）若小球 A 和 P 在时刻 $t=\beta\sqrt{\frac{l}{g}}$（$\beta$ 为常数）相遇于斜面某处，求此情况下区域 Ⅱ 的匀强电场的场强 E，并讨论场强 E 的极大值和极小值及相应的方向.

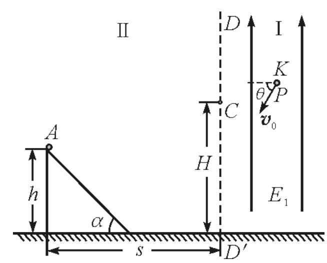

图1 题目附图

参考答案给出的解答如下：

解析：（1）由题知，小球 P 在区域 Ⅰ 内做匀速圆周运动，有

$$m\frac{v_0^2}{r}=qv_0B$$

代入各量解得

$$B=\frac{m\pi}{3lq}\sqrt{gl}$$

（2）小球 P 在区域 Ⅰ 做匀速圆周运动转过的圆心角为 θ，运动到 C 点的时刻为 t_C，到达斜面底端时刻为 t_1，有

$$t_C=\frac{\theta r}{v_0}$$

$$s-h\cot\alpha=v_0(t_1-t_C)$$

小球 A 释放后沿斜面运动加速度为 a_A，与小球 P 在时刻 t_1 相遇于斜面底端，有

$$mg\sin\alpha=ma_A$$

$$\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}a_A(t_1-t_A)^2$$

联立以上方程可得

$$t_A=(3-2\sqrt{2})\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(3) 设所求电场方向向下，在 t'_A 时刻释放小球 A，小球 P 在区域 Ⅱ 运动加速度为 a_P，有

$$s=v_0(t-t_C)+\frac{1}{2}a_A(t-t'_A)^2\cos\alpha$$

$$mg+qE=ma_P$$

$$H-h+\frac{1}{2}a_A(t-t'_A)^2\sin\alpha=\frac{1}{2}a_P(t-t_C)^2$$

联立相关方程解得

$$E=\frac{(11-\beta^2)mg}{q(\beta-1)^2}$$

对小球 P 的所有运动情形讨论可得 $3\leqslant\beta\leqslant5$.

由此可得场强极小值为 $E_{\min}=0$；场强极大值为 $E_{\max}=\frac{7mg}{8q}$，方向竖直向上.

由于题中有"(β 为常数)"这个条件，笔者的学生中有人产生了这种理解

$$t=\beta\sqrt{\frac{l}{g}}$$

为一个恒长时间(β 为常数)，即小球做类平抛的时间 $t_{抛}=(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}$ 恒定，从而

$$\sqrt{\frac{2y}{\frac{(qE+mg)}{m}}}=(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

可以通过调节电场 E 的值，从而对应着不同的 y 值，因为两球相遇于斜面某处，故 $l\leqslant y\leqslant 3l$.

当 $y=l$ 时，P 球恰好落在斜面顶端

$$\sqrt{\frac{2lm}{qE_{\min}+mg}}=(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

解得

$$E_{\min}=\frac{(1+2\beta-\beta^2)mg}{(\beta-1)^2q}$$

当 $y=3l$ 时，P 球恰好落在斜面底端

$$\sqrt{\frac{6lm}{qE_{\max}+mg}}=(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

解得

$$E_{\min}=\frac{(5+2\beta-\beta^2)mg}{(\beta-1)^2q}$$

这明显与参考答案给出的结果不符.此解错误很明显.在上面的解法中 E 和 y 受到的约束方程为

$$\sqrt{\frac{2y}{\frac{qE+mg}{m}}}=(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

其实改变 E(即改变类平抛的加速度 a_P)，小球类平抛的轨迹随之改变；在斜面上的落点和类平抛时间也随之改变，即 E 和 y 还有隐藏的内部关联，还要受到抛物线的约束，因此 E 和 y 的约束条件中的 β 不能理解为恒常数，β 必须理解为参量常数.

受此启发，笔者由此联想到了另外一种偏数学化的解法.

建立以 C 为原点、竖直向下为 y 轴正向、水平向左为 x 轴正向的平面直角坐标系，如图 2 所示.设 P 球的轨迹方程为 $y=kx^2$，电场向下为正，则

$$a_P=\frac{qE+mg}{m}$$

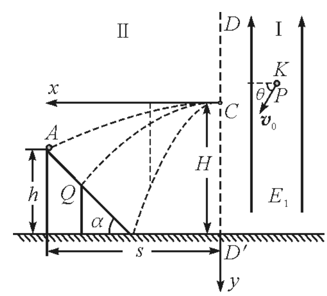

图 2　另一种解法的附图

令

$$t_0=1\ \text{s}$$

则

$$x=v_0t_0=\sqrt{gl}$$

$$y_0=\frac{1}{2}a_Pt_0^2=\frac{qE+mg}{2m}$$

解得抛物线方程

$$y=\frac{qE+mg}{2mgl}x^2$$

而斜面顶端和底端的坐标分别为$(4l,l)$、$(2l,3l)$，解得斜面方程 $y=5l-x$.联立解得交点

$$x=\frac{\left(\sqrt{\frac{10qE+11mg}{mg}}-1\right)mgl}{qE+mg}$$

$$t_{抛}=\frac{x}{v_0}=(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

化简得

$$(\beta-1)^2(qE)^2+(2\beta^2-2\beta-10)qE\cdot mg+(\beta^2-11)(mg)^2=0$$

即

$$[(\beta-1)^2qE+(\beta^2-11)mg](qE+mg)=0$$

解得

$$E=\frac{(11-\beta^2)mg}{(\beta-1)^2q}$$

可通过调节电场 E,使轨迹恰好经过斜面底端和顶端,则

$$t_{抛}\in\left[\frac{2l}{v_0},\frac{4l}{v_0}\right]$$

即

$$t\in\left[3\sqrt{\frac{l}{g}},5\sqrt{\frac{l}{g}}\right]$$

从而 $3\leqslant\beta\leqslant5$.

当 $\beta=\sqrt{11}$ 时

$$E_{\min}=0$$

当 $\beta=5$ 时

$$E_{\max}=-\frac{7mg}{8q}$$

方向竖直向上.

从此解法可以更加清析地看出:改变 E,小球类平抛的轨迹及落点随之改变,从而

$$t_{抛}=\frac{x}{v_0}=\sqrt{\frac{2y}{\frac{qE+mg}{m}}}$$

也随之改变,即不能将 β 理解为一个恒常数,而是参常数.

反思该学生的错误,他明显没有进行该物理过程的细节动态分析,事实上该生的物理成绩在班上还不错,因此笔者认为在以后的物理教学中,需要更加强化过程分析的能力.

另外,笔者还有另一种稍微简单的解法如下:

调节电场 E 的值,使 P 球正好落在斜面底端

$$x=2l$$

$$t_{抛}=\frac{x}{v_0}=2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$y=3l=\frac{1}{2}\frac{qE+mg}{m}\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2$$

解得

$$E=\frac{mg}{2q}$$

当向下减小 E,小球的轨迹变化趋势是向上翘,如图 2 所示.使 P 球正好落在斜面顶端

$$x=4l$$

$$t_{抛}=4\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$y=l=\frac{1}{2}\frac{qE+mg}{m}\left(4\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2$$

解得

$$E=-\frac{7mg}{8q}$$

可见在中间某点电场 E 的方向反向.故

$$E_{\min}=0$$

$$E_{\max}=-\frac{7mg}{8q}(方向竖直向上).$$

设 P 球落在斜面上的某点 Q,Q 距地面高度为 d,则

$$3l-d=\frac{1}{2}\frac{qE+mg}{m}\left[(\beta-1)\sqrt{\frac{l}{g}}\right]^2$$

$$2l+d=v_0t_{抛}=(\beta-1)l$$

两式相加,解得

$$E=\frac{(11-\beta^2)mg}{(\beta-1)^2q}$$

从此解法可以看出:其实此题中 A 球的运动情况对解答此题并无实质影响,因为 A 球释放的时间是可以灵活调节的(因此参考答案中列出 A 球的运动方程是存在冗余的).但是 A 球运动轨道的形状——斜面倾角对解题有关键影响,此题的运动看起来是 2 个关联的运动,实际上只是一个类平抛运动在轨道限制条件下(包括受力的限制和截止落点的限制)的单独运动.