

# 分数阶 $RL_\alpha - C_\beta$ 并联谐振电路的等效电路\*

王诗靖

(重庆市荣昌中学 重庆 402460)

王廷江

(西南大学荣昌校区基础部 重庆 402460)

(收稿日期:2016-07-23)

**摘要:**  $RL - C$  并联谐振电路是一种非常重要的谐振电路,将其推广到分数阶,并根据等效原理,得到与分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路等效的分数阶  $R'L'_\alpha C'_\beta$  并联电路及整数阶  $R''L''C''$  并联电路。

**关键词:** 分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路 谐振 等效电路

## 1 引言

$RL - C$  并联谐振是一种重要的谐振形式,由电感线圈和电容器并联而成,因实际线圈总是有电阻,就如同一个电阻与理想电感串联后再与电容并联,该谐振被广泛应用于无线电工程和其他电子技术领域,以实现有选择地传送信号的目的.但现在广泛采用的此电路是建立在整数阶微积分基础之上,由于分数阶微积分有其独特优势,近年来在电路领域的应用研究十分活跃<sup>[1~5]</sup>.

本文将  $RL - C$  并联电路推广到分数阶,构建了分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路,并根据电路等效原理,将该分数阶电路等效成分数阶  $R'L'_\alpha C'_\beta$  并联型电路及整数阶  $R''L''C''$  并联型电路结构形式,这将有助于对分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  电路的深入研究.

## 2 分数阶 $RL_\alpha - C_\beta$ 并联电路

分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路如图 1 所示.图中  $R, L_\alpha, C_\beta$  分别为电阻、分数阶电感和分数阶电容,  $\alpha, \beta$  分别为电感、电容的分数阶数,其值为:  $n - 1 < \alpha < n, m - 1 < \beta < m$ , 式中  $n$  和  $m$  为整数.

由电路理论,在频率为  $\omega$

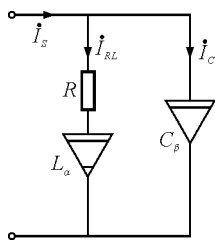


图 1 分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$

的正弦交流电源作用下电路的导纳为

$$Y(j\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{R + (j\omega)^\alpha L} + (j\omega)^\beta C \quad (1)$$

在  $\alpha = \beta$ , 且  $\frac{CR^2}{L} \ll 1$  时, 电路谐振频率为

$$\omega_0 \approx \left( \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2)$$

## 3 分数阶 $RL_\alpha - C_\beta$ 并联电路的等效电路

### 3.1 $RL_\alpha - C_\beta$ 并联电路等效为分数阶 $R'L'_\alpha C'_\beta$ 并联电路

等效电路如图 2 所示.

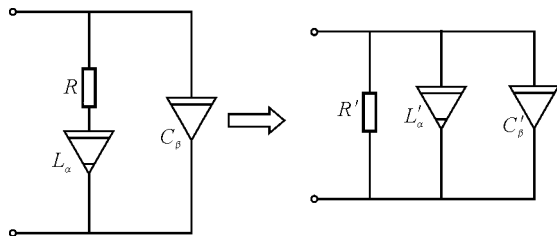


图 2 等效为  $R'L'_\alpha C'_\beta$  并联电路图

由式(1),  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路导纳可表示为

$$Y(j\omega, \alpha, \beta) = \frac{R}{R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2} + \frac{\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2} + \omega^\beta C$$

\* 西南大学实验技术研究项目,项目编号:SYJ2016058

作者简介:王诗靖(2000-),女,在读高中生.

指导教师:王廷江(1969-),男,硕士,副教授,主要从事电工理论与新技术,非线性电路与系统研究.

$$j \frac{\omega^\alpha L \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2} + (j\omega)^\beta C \quad (3)$$

分数阶  $R'L'_\alpha C'_\beta$  并联电路的导纳为

$$Y'(j\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{R'} + \frac{1}{(j\omega)^\alpha L'} + (j\omega)^\beta C' \quad (4)$$

整理得  $Y'(j\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{R'} + \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\omega^\alpha L'} -$

$$j \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\omega^\alpha L'} + (j\omega)^\beta C' \quad (5)$$

根据等效变换要求:  $Y'(j\omega, \alpha, \beta) = Y(j\omega, \alpha, \beta)$ , 比较式(3)和式(5)应有

$$\begin{cases} R' = R + 2\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \frac{1}{R} (\omega^\alpha L)^2 \\ L' = \frac{R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2}{\omega^{2\alpha} L} \\ C' = C \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)等效电路元件参数代入分数阶  $RL_\alpha C_\beta$  并联电路谐振频率公式<sup>[2]</sup>, 就可得到式(2)的结果。

### 3.2 $RL_\alpha - C_\beta$ 并联电路等效为整数阶 $R'L''C''$ 并联电路

$$\begin{cases} R'' = \frac{R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2}{R + \omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \left[R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2\right] \omega^\beta C \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)} \\ L'' = \frac{R^2 + 2R\omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (\omega^\alpha L)^2}{\omega^{\alpha+1} L \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \\ C'' = \omega^{\beta-1} C \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)等效电路元件参数代入整数阶  $RLC$  并联电路谐振频率公式, 也可得到式(2)结果。

## 4 结论

根据等效原理, 求得与  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路等效的分数阶  $R'L'_\alpha C'_\beta$  并联电路及整数阶  $R''L''C''$  并联电路, 并通过谐振频率验证了等效的正确性。这将为研究分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路提供一些新途径, 即可从研究等效电路入手来研究。

### 参考文献

1 Radwan A G, salama K N. Passive and active elements using fractional  $L_\beta C_\alpha$  Circuit. IEEE Transaction on Circuit

等效电路如图3所示。

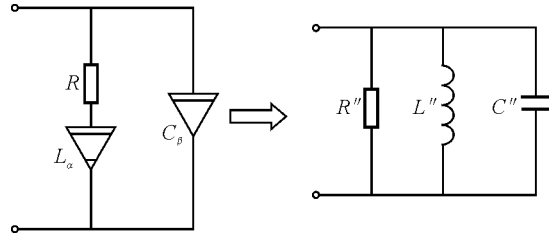


图3 等效的  $R''L''C''$  并联电路图

由式(1),  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路导纳又可表示为

$$Y(j\omega, \alpha, \beta) = \left\{ \frac{R + \omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left[R + \omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[\omega^\alpha L \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2} + \omega^\beta C \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} + j \left\{ \frac{-\omega^\alpha L \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left[R + \omega^\alpha L \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[\omega^\alpha L \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2} + \omega^\beta C \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \quad (7)$$

整数阶  $R''L''C''$  并联电路的导纳为

$$Y''(j\omega) = \frac{1}{R''} + j \left( -\frac{1}{\omega L''} + j\omega C'' \right) \quad (8)$$

根据等效变换要求:  $Y''(j\omega) = Y(j\omega, \alpha, \beta)$ , 比较式(7)和式(8)应有

and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(10): 2 388 ~ 2 397  
 2 刁利杰, 张小飞, 陈帝伊. 分数阶并联  $RL_\alpha C_\beta$  电路. 物理学报, 2014, 63(3): 038401  
 3 余战波. 分数阶 T 型  $L_\alpha C_\beta$  电路仿真研究. 西南大学学报: 自然科学版, 2015, 37(2): 141 ~ 147  
 4 Zhou Rui, Zhang Run - Fan, Chen Di - Yi. Fractional - order  $L_\beta C_\alpha$  Low - Pass Filter Circuit. Journal of Electrical Engineering and Technology, 2015, 10(4): 1 597 ~ 1 609  
 5 Rui Zhou, Diyi Chen, Herbert H. C. Iu. Fractional - Order  $2 \times n$  RLC Circuit Network. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2015, 24(9): 1 550 142