带电粒子在洛伦兹力和重力作用下的运动轨迹

姚东亮
（乌鲁木齐八一中学 新疆 乌鲁木齐 830002）

（收稿日期：2016－08－31）

摘　要：用数学方法证明了一种物体在复杂作用力下的运动轨迹.

关键词：轨迹　微分方程组　摆线

在高中物理教学当中，我们常会遇到这样一类问题：如图1所示，一个质量为m，带电荷量为$+q$的物体处在垂直纸面向内的匀强磁场B中的光滑绝缘斜面上，物体从静止出发，则物体在斜面上最大速度是多少？

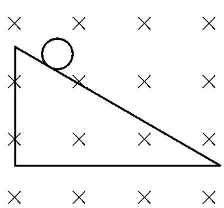

图1　题图

显然当$qvB=mg\cos\theta$时，有$v_{\rm m}=\dfrac{mg\cos\theta}{qB}$. 然而在这之后，物体的高度继续降低，速度继续增大，那么它在全过程中的最大速度是多少？ 它最终是否会达到$qvB=mg$这样的状态以$v_{\rm m}=\dfrac{mg}{qB}$做匀速直线运动？ 它最终的轨迹是怎样的一条曲线呢？ 有不少同学甚至是教师都会认为它会达到$qvB=mg$这样的状态以$v_{\rm m}=\dfrac{mg}{qB}$做匀速直线运动.

这个问题的本质就是带电物体在洛伦兹力及恒力作用下的运动轨迹问题. 为使问题简化，我们去掉斜面，直接让物体从磁场中由静止下落，某时刻t物体受力情况，运动情况及建立坐标系如图2所示，物体从原点出发，设此时刻洛伦兹力与竖直方向夹角为θ，则在竖直、水平方向上分别有

$$\begin{cases}mg-qvB\cos\theta=ma_y\\ qvB\sin\theta=ma_x\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}mg-qBv_x=ma_y\\ qBv_y=ma_x\end{cases}$$

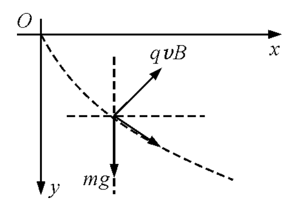

图2　带电物体受力分析

而速度与加速度分别是位移对时间的一阶导数和二阶导数，因此有

$$\begin{cases}mg-qB\dot{x}=m\ddot{y} & (1)\\ qB\dot{y}=m\ddot{x} & (2)\end{cases}$$

对此微分方程组两边再对时间求一次导有

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{m}{qB}\dddot{y} & (3)\\ \ddot{y}=\dfrac{m}{qB}\dddot{x} & (4)\end{cases}$$

把式(3)、(4)分别代入式(2)、(1)令$k=\dfrac{qB}{m}$则式(1)、(2)化为

$$\begin{cases}\dddot{x}+k^2\dot{x}-kg=0 & (5)\\ \dddot{y}+k^2\dot{y}=0 & (6)\end{cases}$$

这一组微分方程的解即为物体轨迹关于时间的参数方程，(5)、(6)两式的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3+k^2\lambda=0$$

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=ki$$

$$\lambda_3=-ki$$

所以基础解系组为$\sin kt$，$\cos kt$，又$\lambda_1=0$，所以

设式(5)的特解形式为

$$x = C_{4x} t$$

代入式(5)有

$$C_{4x} k^2 = kg$$

$$C_{4x} = \frac{g}{k}$$

则有

$$\begin{cases} x = C_{1x} + C_{2x} \sin kt + C_{3x} \cos kt + \dfrac{g}{k} t \\ y = C_{1y} + C_{2y} \sin kt + C_{3y} \cos kt \end{cases}$$

为式(5)、(6)的通解. 下面通过初始条件来确定常数项.

本问题的初始条件为，当 $t = 0$ 时，有

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \ddot{x}_0 = 0;$$

$$y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, \ddot{y}_0 = g.$$

由 $x_0 = 0$，推得

$$C_{1x} + C_{3x} = 0 \qquad C_{1x} = -C_{3x}$$

由 $\dot{x}_0 = 0$ 推得

$$C_{2x} k \cos kt - C_{3x} k \sin kt + \frac{g}{k} = 0$$

$$C_{2x} k = -\frac{g}{k}$$

$$C_{2x} = -\frac{g}{k^2}$$

由 $\ddot{x}_0 = 0$ 推得

$$-C_{2x} k^2 \sin kt - C_{3x} k^2 \cos kt = 0$$

$$C_{3x} = -C_{1x} = 0$$

同理可求

$$C_{1y} = -C_{3y}$$

$$C_{2y} = 0$$

$$C_{3y} = -\frac{g}{k^2}$$

$$C_{1y} = \frac{g}{k^2}$$

则

$$\begin{cases} x = \dfrac{g}{k^2}(kt - \sin kt) \\ y = \dfrac{g}{k^2}(1 - \cos kt) \end{cases}$$

这是摆线的标准参数方程，即带电粒子轨迹为一条摆线，如图 3 所示.

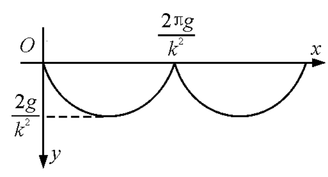

图 3　带电粒子运动的轨迹图像

其他情况，只需改变物体的初始条件再代入求解即可；因此，带电物体最终不会沿一条直线运动，类似在一个由摆线构成的曲面上运动的小球。又如速度选择器中若 $qE \neq qvB$ 与此类似，只需将 $\dot{x}_0 = v_0$，mg 换成 qE 代入即可求得速度选择器中粒子的轨迹方程. 下面求全过程中的最大速度

$$\dot{x} = \frac{g}{k^2}(k - k\cos kt) = \frac{g}{k}(1 - \cos kt)$$

$$\dot{y} = \frac{g}{k} \sin kt$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} =$$

$$\frac{g}{k}\sqrt{(1 - \cos kt)^2 + \sin^2 kt} =$$

$$\frac{g}{k}\sqrt{2 - 2\cos kt}$$

所以当 $\cos kt = -1$ 时有最大速度

$$v_m = \frac{2g}{k} = \frac{2mg}{qB}$$

可见最大速度由 $\frac{g}{k}$ 来决定.

The Trajectory of Charged Particles under the Lorentz Force and the Gravity

Yao Dongliang

(Urumqi bayi high school, Urumqi, xinjiang　830002)

Abstract: This paper mathematically proved the object trajectory under complex force.

Key words: trajectory; simultaneous differential equations; cycloid