分数阶 RL_α-C_β 并联谐振频率简易表达式*

王廷江

（西南大学荣昌校区基础部　重庆　402460）

（收稿日期：2016-09-14）

摘　要：将 RL-C 并联谐振推广到分数阶，求得分数阶 RL_α-C_β 并联谐振频率的一般表达式，推导出 $\alpha=\beta$ 时谐振频率的简易表达式.

关键词：分数阶　并联谐振　频率　表达式

分数阶微积分与整数阶微积分几乎同时产生，但因其复杂性、应用背景缺乏等原因而发展缓慢. 直到 Mandelbort[1] 指出在自然界及诸多技术领域中存在大量分维数的事实，分数阶微积分才引起关注，并且目前已在很多领域有很好的应用.

RL-C 并联电路是一种重要的单元电路，本身由电感线圈和电容器并联构成，但由于实际线圈总是有电阻，就如同一个电阻与理想电感线圈串联后再与电容器并联. 对整数阶 RL-C 并联谐振曾有文献对其进行过深入讨论[2~3]，本文将其推广到分数阶，对谐振频率进行了推导，得到了频率的简易表达式，将为后续深入研究打下基础.

1　分数阶并联谐振

图 1 所示为 RL_α-C_β 并联电路示意图. 图中 R，L_α，C_β 分别为电阻、分数阶电感和分数阶电容，α 和 β 为分数阶数，其取值为：$n-1<\alpha<n$，$m-1<\beta<m$，其中 n，m 为整数.

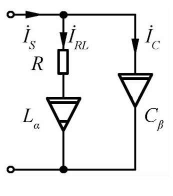

图 1　分数阶 RL_α-C_β 并联电路

在频率为 ω 的正弦交流电源作用下，电路的导纳为

$$Y(j\omega,\alpha,\beta)=\frac{1}{R+(j\omega)^\alpha L}+(j\omega)^\beta C \qquad (1)$$

整理得变换为

$$\begin{aligned}&Y(j\omega,\alpha,\beta)=\\&\left\{\frac{R+\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L}{\left[R+\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2}+\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\omega^\beta C\right\}+\\&j\left\{\frac{-\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L}{\left[R+\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2}+\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\omega^\beta C\right\}\end{aligned} \qquad (2)$$

将式(2) 简写成

$$\begin{aligned}Y(j\omega,\alpha,\beta)&=G+j(B_C-B_L)=\\G+jB&=|Y(j\omega,\alpha,\beta)|\angle\varphi\end{aligned} \qquad (3)$$

式中 $|Y(j\omega,\alpha,\beta)|=\sqrt{G^2+B^2}$，称导纳模；$\varphi=\arctan\dfrac{B}{G}$，为导纳相位角；$B_C$ 为容纳，B_L 为感纳，B 为电纳，G 为电导. 当 $B=0$ 时，$\varphi=0$，即此时端电压与总电流同相位，电路呈电阻性，电路处于谐振状态.

2　RL_α-C_β 并联谐振频率简易式

依据式(3) 并结合式(2)，当电路发生谐振时，

* 西南大学实验技术研究项目，项目编号：SYJ2016058

作者简介：王廷江（1969-　），男，硕士，副教授，主要从事电工理论与新技术、非线性电路与系统研究.

应有

$$\frac{-\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^{\alpha}L}{\left[R+\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^{\alpha}L\right]^{2}+\left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^{\alpha}L\right]^{2}}+$$

$$\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\omega^{\beta}C=0$$

取 $\alpha=\beta$,上式解得

$$\omega_0=\left\{\left[\frac{R^2}{L^2}\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{1}{LC}\left(1-\frac{CR^2}{L}\right)\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{R}{L}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\qquad(4)$$

式(4) 是 RL_{α}-C_{β} 并联电路在 $\alpha=\beta$ 时谐振频率的一般式,由电路元件参数和分数阶次共同决定,称固有频率.

在式(4) 中,当 $\alpha=1$ 时(即整数阶)

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{L}}$$

当 $\frac{CR^2}{L}\ll 1$ 时,$\omega_0\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}$,这与整数阶 RL-C 并联谐振的推导结论相吻合[2~5]. 从频率角度看,整数阶 RL-C 并联谐振是分数阶 RL_{α}-C_{β} 并联谐振的特例.

在实际工程中,通常有 $\frac{CR^2}{L}\ll 1$,依据此可对式(4) 作近似处理.

当 $\frac{CR^2}{L}\ll 1$ 时,$1-\frac{CR^2}{L}\approx 1$,式(4) 变为

$$\omega_0=\left\{\left[\frac{R^2}{L^2}\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{1}{LC}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{R}{L}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

将上式变换为

$$\omega_0=\left\{\frac{R}{L}\left[\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{L}{CR^2}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{R}{L}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

因 $\frac{CR^2}{L}\ll 1$,所以 $\frac{L}{CR^2}\gg 1$,而

$$0\leqslant\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\leqslant 1$$

则 $$\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{L}{CR^2}\approx\frac{L}{CR^2}$$

所以上式可进一步简化为

$$\omega_0=\left[\frac{R}{L}\left(\frac{L}{CR^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{R}{L}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

而 $$\left(\frac{L}{CR^2}\right)^{\frac{1}{2}}\gg\left|\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|$$

从而可得 RL_{α}-C_{β} 并联电路谐振频率简化表达式

$$\omega_0=\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\qquad(5)$$

在式(5) 中,当 $\alpha=1$ 时,也可得到对应整数阶电路谐振频率的简化式.

3 结论

由电路理论推导出分数阶 RL_{α}-C_{β} 并联谐振频率的一般表达式,根据工程实际,得到谐振频率的简易表达式,谐振频率主要由电容、电感元件参数及分数阶数决定,这为深入研究该谐振打下一定的基础. 从频率的角度看分数阶更具有普遍意义,整数阶是分数阶的一种特殊情形.

参 考 文 献

1 Mandelbort B B. The Fractal Geometry of Nature. New York:W. H. Freeman and Company,1983

2 陈水生. 关于 RL-C 并联谐振特性曲线的讨论. 大学物理,1998,17(5):18 ~ 19

3 陈水生,郑富年. RL-C 并联谐振态量与 Q 的几个关系式. 大学物理,1999,18(10):23 ~ 25

4 邱关源. 电路. 北京:高等教育出版社,1999. 216 ~ 219

5 周守昌. 电路原理. 北京:高等教育出版社,1999. 252 ~ 254

Simple Expression on Frequency of Parallel Resonance Circuit of Fractional-order RL_{α}-C_{β}

Wang Tingjiang

(Department of Basic Science Rongchang Campus,Southwest University,Chongqing 402460)

Abstract:In this paper, the parallel resonant of RL-C will be promoted to the fractional order. The general expression of parallel resonant frequency about RL_{α}-C_{β} is deduced, and simplified the expressions of resonant frequency, with $\alpha=\beta$ as the condition.

Key words:fractional-order;parallel resonance;frequency;expression