一个奇妙的斜抛运动新规律

陈向正　李　力

（重庆清华中学　重庆　400054）

（收稿日期：2016－09－18）

摘　要：质点做斜抛运动的过程中，瞬时速度与相对抛出点位移的夹角存在最大值，该最大夹角只与初速度方向有关，与初速度大小无关；达到最大夹角所用时间，只与初速度大小和重力加速度大小有关，与初速度方向无关.证明了这条斜抛运动的奇妙规律，并指出它对任意匀变速曲线运动均成立.

关键词：斜抛运动　新规律　速度与位移的夹角　匀变速曲线运动

文献[1]首次提出并证明了平抛运动的一条新规律，即“任何做平抛运动或类平抛运动的质点，在运动过程中，相对抛出点的位移与速度的夹角存在最大值.该最大值的正切为$\frac{\sqrt{2}}{4}$；达到这一最大值所需时间为$\frac{\sqrt{2}v_0}{g}$”.文献[2]则给出了一种比较简捷的证明.

捧读之后，耳目为之一新.笔者由衷地赞赏两位同行发现、证明新规律的工作.欣喜之余，萌发一个想法，对一般的斜抛运动，会不会也有类似的规律呢？经过一番思考和推导，果然不出预料，笔者得到一个关于斜抛运动的更普遍、更奇妙的新规律，写成此文与各位同行分享.

如图1所示，建立以抛出点为原点的平面直角坐标系 xOy.质点的初速度大小为 v_0，抛射角为 θ，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.经过一段时间 t，质点相对于抛出点的位移为 OP，与 x 轴正向夹角为α；瞬时速度 v_P 与 x 轴正向夹角为β.

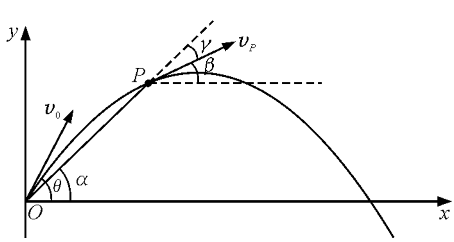

图1　直角坐标系中的斜抛运动

斜抛运动的轨迹参数方程、轨迹方程分别为

$$x=v_0t\cos\theta$$

$$y=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \tag{2}$$

显然有

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\tan\theta-\frac{gt}{2v_0\cos\theta} \tag{3}$$

$$\tan\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\theta-\frac{gt}{v_0\cos\theta} \tag{4}$$

设速度 v_P 与位移 OP 的夹角为γ，则

$$\gamma=\alpha-\beta \tag{5}$$

把式(3)、(4)、(5)代入三角公式

$$\tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

化简后可得

$$\tan\gamma=\frac{\frac{gt}{2v_0\cos\theta}}{1+\left(\tan\theta-\frac{gt}{2v_0\cos\theta}\right)\left(\tan\theta-\frac{gt}{v_0\cos\theta}\right)}=\frac{1}{\frac{2v_0}{gt\cos\theta}+\frac{gt}{v_0\cos\theta}-3\tan\theta} \tag{6}$$

由均值不等式有

$$\frac{2v_0}{gt\cos\theta}+\frac{gt}{v_0\cos\theta}\geqslant 2\sqrt{\frac{2v_0}{gt\cos\theta}\frac{gt}{v_0\cos\theta}}=\frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta} \tag{7}$$

当且仅当$\frac{2v_0}{gt\cos\theta}=\frac{gt}{v_0\cos\theta}$时，$\tan\gamma$ 取最大值，从而γ有最大值，得

$$t=\frac{\sqrt{2}v_0}{g} \tag{8}$$

$$(\tan\gamma)_{\max}=\tan\gamma_{\max}=\frac{\cos\theta}{2\sqrt{2}-3\sin\theta} \tag{9}$$

这是一个奇妙的规律：质点做斜抛运动的过程中，瞬时速度与相对于抛出点的位移的夹角存在最大值，从式(9) 知，该最大夹角只与初速度的方向(即抛射角 θ) 有关，与初速度大小 v_0 无关；从式(8) 知，达到最大夹角所用时间，只与初速度的大小 v_0 和重力加速度大小 g 有关，与初速度方向无关.

如果物体做平抛运动，则令 $\theta = 0$，代入式(9)，有

$$(\tan\gamma)_{\max} = \tan\gamma_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \tag{10}$$

此时最大夹角

$$\gamma_{\max} = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 19.5^\circ$$

式(8)、(10) 与文献[1,2] 所得平抛运动的新规律一致，可见文献[1,2] 的结果为本文所得规律的特例.

如果抛射角

$$\theta = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

即

$$2\sqrt{2} - 3\sin\theta = 0$$

或

$$\theta \approx 70.5^\circ$$

从式(9) 知最大夹角为

$$\gamma_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

由于当 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，式(9) 分子 $\cos\theta$ 恒为正，于是有如下结论：当 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5^\circ$ 时，最大夹角 $\gamma_{\max}$ 是锐角；当 $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，$\gamma_{\max}$ 是钝角.

从式(9) 可得 $\gamma_{\max} = \arctan\dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{2} - 3\sin\theta}$，其中 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. 用数学软件作出 $\gamma_{\max}$ - θ 图像，如图 2 所示(注意角度单位取“度”)，从中可以直观地看出上述各种不同抛射角的情况.

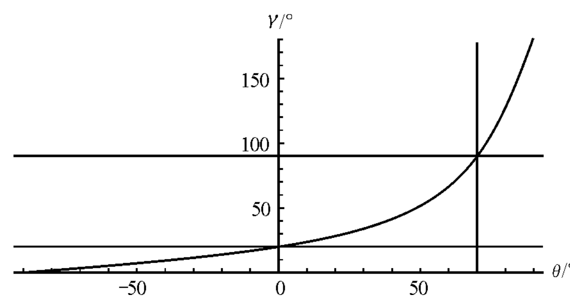

图 2　位移和速度的最大夹角与抛射角的关系

熟悉而简单的斜抛运动，竟然还存在这样一个不为人所察觉的奇妙规律，可见大自然之神奇美妙. 最后顺便指出，容易推广得到：对于任意匀变速曲线运动，当初速度 v_0 与加速度 a 的夹角为 $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ $\left(其中 -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 时，也有同样的规律，只需将式(9) 中的 g 换成 a 即可.

参 考 文 献

1　马俊坡. 平抛运动的又一规律. 物理通报，2015(12)：27 ～ 29

2　王建忠. 对“平抛运动的又一规律”的补充. 物理通报，2016(6)：44 ～ 45

A Wonderful New Law of Oblique Motion

Chen Xiangzheng　Li Li

(Chongqing Qinghua High School, Chongqing 400054)

Abstract: In the process of oblique projectile motion, the angle between velocity and displacement has a maximum value, the value is only related to the initial velocity direction, has nothing to do with the initial velocity. The time of reach the maximum value , is only related to the initial velocity and gravity acceleration, has nothing to do with the initial velocity direction. This paper proves the new rule, and points out that this law is applicable to any uniformly accelerated curve motion.

Key words: oblique throw motion; new law; angle between velocity and displacement; uniformly accelerated curve motion