以不变应万变之矢量运算策略

—— 例说正交分解法在高考题解中的应用

丁岳林

（常州高级中学　江苏 常州　213003）

（收稿日期：2016－09－20）

物理学中矢量运算（合成与分解）的基本法则是平行四边形定则，也可简化为三角形定则，当涉及两个以上矢量的合成时可以是应用平行四边形定则逐次相加或者是应用多边形定则一次性完成．从作图的方面来看，平行四边形定则或多边形定则是非常直观简洁的表达方式，但在进行定量计算时，求解任意三角形或多边形往往比较麻烦．

关于矢量的分解，是中学物理教学中的难点，虽说分解是合成的逆运算，但因为矢量的分解往往不具有唯一性（由已知的对角线作平行四边形可以有无数解），从而使问题变得比较复杂．一般考虑从矢量产生的效果进行分解，很多时候是考虑研究问题的需要，而正交分解法则是最常用的也是最有效的方法，特别是应用正交分解的方法研究矢量的合成，无论是静力学或者是动力学问题中应用都非常普遍，本文试以几道高考题为例来领略正交分解法的普适性．

【例 1】（2016 年高考江苏卷第 14 题）如图 1 所示，倾角为 α 的斜面 A 被固定在水平面上，细线的一端固定于墙面，另一端跨过斜面顶端的小滑轮与物块 B 相连，B 静止在斜面上．滑轮左侧的细线水平，右侧的细线与斜面平行．A 和 B 的质量均为 m．撤去固定 A 的装置后，A 和 B 均做直线运动．不计一切摩擦，重力加速度为 g．求：A 滑动的位移为 s_A 时，B 的位移大小 s_B．

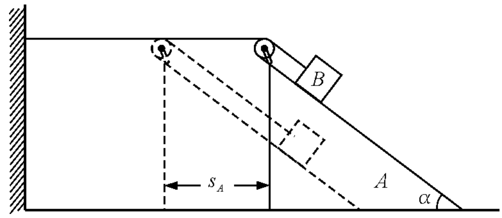

图 1　例 1 题图

解析一：平行四边形法

当斜面 A 向左运动时，物块 B 一方面跟随 A 向左运动，同时，又相对于 A 沿斜面向下滑动，两个分运动的位移大小都是 s_A，所要求的 B 的位移即为两个分位移的矢量和，可作出图 2 所示的平行四边形，此时平行四边形是一菱形，取其四分之一即为一直角三角形，可得

$$s_B = 2s_A \sin\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

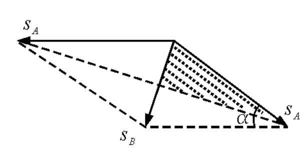

图 2　平行四边形解法

解析二：正交分解法

建立如图 3 所示的直角坐标系，物块 B 在 x 和 y 方向的位移分量分别为

$$x_B = s_A(1-\cos\alpha)$$

$$y_B = s_A\sin\alpha$$

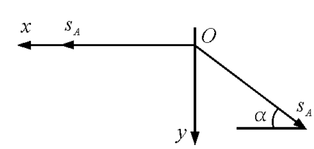

图 3　正交分解解法

合位移的大小为

$$s_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

解得

$$s_B = \sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot s_A$$

解法一中的平行四边形为菱形，在计算时所解的是直角三角形，解法二中无论是求分位移的过程或者是求合位移的过程都是解的直角三角形，因此说两种解法难易程度相当，考生可以根据自己的喜好选择．要说明的是，两种解的结果表达式看上去并

不一致,但运用三角公式不难证明两种结果是等价的.

【**例 2**】(2016 年高考上海卷第 24 题) 如图 4 所示,质量为 m 的带电小球 A 用绝缘细线悬挂于 O 点,处于静止状态. 施加一匀强电场后,A 向右摆动,平衡位置在 $\alpha=60°$ 处,然后将 A 的质量改变为 $2m$,其新的平衡位置在 $\alpha=30°$ 处,A 受到的电场力大小为______.

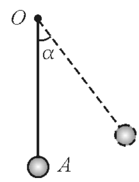

图 4　例 2 题图

解析一:正弦定理法

以小球 A 为研究对象,受重力 G,电场力 F 和绳子拉力 T 作用处于平衡,设电场力与竖直方向夹角为 β,可作出图 5 所示的力三角形,对于第一次平衡,$G_1=mg$,$\alpha_1=60°$,对第二次平衡,$G_2=2mg$,$\alpha_2=30°$,由正弦定理分别得

$$\frac{F}{\sin\alpha_1}=\frac{G_1}{\sin(180°-\alpha_1-\beta)}$$

$$\frac{F}{\sin\alpha_2}=\frac{G_2}{\sin(180°-\alpha_2-\beta)}$$

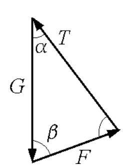

图 5　正弦定理解法

解得

$$\beta=60° \qquad F=mg$$

解析二:正交分解法

设电场力沿水平向右方向的分力为 F_x,沿竖直向上方向的分力为 F_y,小球 A 受力如图 6 所示,根据共点力平衡条件

$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0$$

可得

$$F_x-T_1\sin\alpha_1=0$$

$$F_y+T_1\cos\alpha_1-mg=0$$

$$F_x-T_2\sin\alpha_2=0$$

$$F_y+T_2\cos\alpha_2-2mg=0$$

将 $\alpha_1=60°$,$\alpha_2=30°$ 代入上式,消去 T_1 和 T_2 得

$$F_x=\frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$F_y=\frac{1}{2}mg$$

再将 F_x 与 F_y 合成,易得

$$F=mg$$

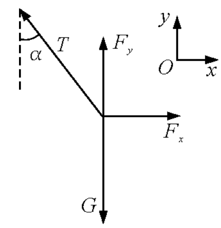

图 6　正交分解解法

解法一,运用正弦定理解力三角形(任意三角形),看上去列式比较简单,但解方程组的要求很高,并且力三角形相关边和角对应关系的确定也不容易,相当一部分考生不习惯此方法. 事实上,在我们的课程标准和考试说明中,涉及力的处理一般都是限于解直角三角形. 解法二,虽然列式比较多,但无论是建立 x 和 y 方向上的平衡方程还是最终由 F_x 与 F_y 求合力,都是解直角三角形,对考生来说熟门熟路,毫不费力,对绝大多数考生来说,可以将正交分解法作为首选.

对于解法二,还可以两次应用正交分解法,在图 6 中,沿绳子拉力 T 方向和垂直于绳子方向建立直角坐标系 $x'Oy'$,将 F_x,F_y 和 G 沿 x',y' 方向分解,在垂直于绳子方向(圆弧切线方向) 建立力的平衡方程,这样,可回避绳子拉力,只要两个方程即可求解 F_x 与 F_y.

【**例 3**】(2016 年高考北京卷第 24 题) 激光束可以看作是粒子流,其中的粒子以相同的动量沿光传播方向运动. 激光照射到物体上,在发生反射、折射和吸收现象的同时,也会对物体产生作用. 光镊效应就是一个实例,激光束可以像镊子一样抓住细胞等微小颗粒.

一束激光经 S 点后被分成若干细光束,若不考虑光的反射和吸收,其中光束 ① 和 ② 穿过介质小球的光路如图 7 所示,图中 O 点是介质小球的球心,入射时光束 ① 和 ② 与 SO 的夹角均为 θ,出射时光束均与 SO 平行. 请在下面两种情况下,分析说明两

光束因折射对小球产生的合力的方向.

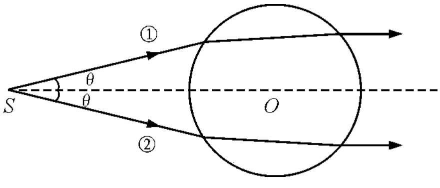

图 7　例 3 题图

(1) 光束 ① 和 ② 强度相同;

(2) 光束 ① 比 ② 强度大.

解析一:矢量三角形法

分别考察光束 ① 和 ② 中各自一个粒子与小球作用过程的始末动量及其动量变化,可作出图 8 所示的矢量三角形,由图中可得

$$p_1 = p_1' = p$$

$$\Delta p_1 = 2p_1 \sin\frac{\theta}{2}$$

$$p_2 = p_2' = p$$

$$\Delta p_2 = 2p_2 \sin\frac{\theta}{2}$$

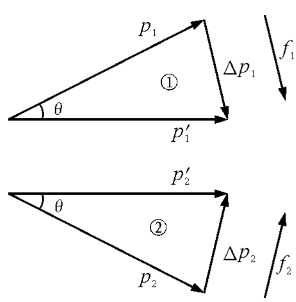

图 8　矢量三角形解法

假设时间 Δt 内光束 ① 和 ② 穿过小球的光粒子数分别为 n_1 和 n_2,由动量定理,时间 Δt 内光束 ① 和 ② 与小球作用的粒子受到的合力分别为

$$F_1 = \frac{n_1 \Delta p_1}{\Delta t} = \frac{2n_1 p \sin\frac{\theta}{2}}{\Delta t}$$

$$F_2 = \frac{n_2 \Delta p_2}{\Delta t} = \frac{2n_2 p \sin\frac{\theta}{2}}{\Delta t}$$

小球受到光粒子的反作用力如图 9 所示.

对于情形 1,$n_1 = n_2$,$F_1' = F_2'$,小球受到光粒子合力方向水平向左.

对于情形 2,$n_1 > n_2$,$F_1' > F_2'$,小球受到光粒子合力方向斜向左上方.

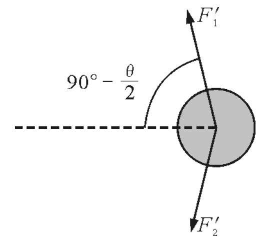

图 9　小球受到的作用力

解析二:正交分解法

选取水平向右方向为 x 轴,竖直向上方向为 y 轴,光束 ① 和 ② 中各自一个粒子与小球作用过程的动量变化分别为

$$\Delta p_{1x} = p_1(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta p_{1y} = -p_1 \sin\theta$$

$$\Delta p_{2x} = p_2(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta p_{2y} = p_2 \sin\theta$$

式中　$p_1 = p_2 = p$

对于时间 Δt 内光束 ① 和 ② 穿过小球的光粒子数整体,动量变化的 x 与 y 分量为

$$\Sigma\Delta p_x = (n_1 + n_2)p(1 - \cos\theta)$$

$$\Sigma\Delta p_y = (n_2 - n_1)p\sin\theta$$

由动量定理,时间 Δt 内光束 ① 和 ② 与小球作用的粒子受到合力的 x、y 分量为

$$F_x = \frac{\Sigma\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{(n_1 + n_2)p(1 - \cos\theta)}{\Delta t}$$

$$F_y = \frac{\Sigma\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{(n_2 - n_1)p\sin\theta}{\Delta t}$$

对于情形(1),$n_1 = n_2$,$F_x > 0$,$F_y = 0$,光粒子对小球的反作用力 $F_x' < 0$,$F_y' = 0$,小球受到光粒子合力方向水平向左.

对于情形(2),$n_1 > n_2$,$F_x > 0$,$F_y < 0$,光粒子对小球的反作用力 $F_x' < 0$,$F_y' > 0$,小球受到光粒子合力方向斜向左上方.

解法一从作动量差的矢量三角形出发,对于矢量性要求很高,容易中途出错.解法二,只要按照固定程序,一定可以正确走到底.

【例 4】(2012 年高考江苏卷第 15 题)如图 10 所示,待测区域 $O-xyz$ 空间存在匀强电场和匀强磁场,根据带电粒子射入时的受力情况可推测其电场和磁场.已知粒子质量为 m,电荷量为 $+q$.当粒子以不同速度水平向右射入待测区域,刚进入时的受力大小均为 F.现保持粒子进入待测区域时的速度大

小为 v_0(不变),使粒子沿不同的坐标轴方向射入待测区域,粒子刚射入时的受力大小如表 1 所示(不考虑粒子受到的重力).

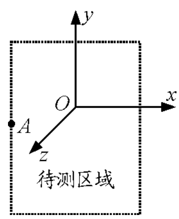

图 10　例 4 题图

请推测该区域中电场强度和磁感应强度的大小及可能的方向.

表 1　粒子刚入射时受力大小

射入方向	y	$-y$	z	$-z$
受力大小	$\sqrt{5}F$	$\sqrt{5}F$	$\sqrt{7}F$	$\sqrt{3}F$

解析:本题电场强度 E 和磁感应强度 B 的大小、方向具有不确定性,需分类讨论.

根据题目提供的信息,按如下程序进行讨论.

(1) 磁场方向

由沿 x 轴方向射入时的受力情况可知,粒子不受磁场力,B 必定平行于 x 轴,方向有沿 $\pm x$ 两种情况.

电场强度的大小 $E=\dfrac{F}{q}$,方向待进一步讨论.

(2) 电场的 z 分量

由粒子沿 $\pm y$ 进入,磁场力分别沿 z 轴的负方向和正方向,而粒子受电场力与磁场力的合力大小不变,故电场力的 z 分量必定为零,因此,电场 E 的 z 分量等于零.

(3) 粒子沿 $\pm y$ 或 $\pm z$ 进入,磁场力 f 大小

设 B 沿 $+x$ 方向.

粒子沿 $\pm y$ 进入或 $\pm z$ 进入,磁场力大小均为 $f=qv_0B$,粒子沿 $\pm y$ 进入时磁场力方向分别沿 $-z$ 和 $+z$;粒子沿 $\pm z$ 进入时磁场力方向分别沿 $+y$ 和 $-y$;

设电场力的 x 与 y 分量分别为 F_x 与 F_y

当 v_0 沿 x 方向时,$F_x^2+F_y^2=F^2$

当 v_0 沿 y 方向时

$$F_x^2+F_y^2+f^2=5F^2 \tag{1}$$

解以上两式可得　　$f=2F$

(4) 确定磁感应强度大小

由 $f=2F$ 及 $f=qv_0B$ 可解得

$$B=\frac{2F}{qv_0}$$

(5) 确定电场力的两个分力

当 v_0 沿 $+z$ 方向时

$$F_x^2+(F_y+f)^2=7F^2 \tag{2}$$

当 v_0 沿 $-z$ 方向时

$$F_x^2+(F_y-f)^2=3F^2 \tag{3}$$

联立式(2)、(3) 解得

$$F_x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}F \qquad F_y=\frac{1}{2}F$$

(6) 确定电场方向与 x 轴正方向的夹角

由以上解得的 F_x 和 F_y 可作出图 11 所示矢量关系的平行四边形,容易得到电场 E 和 x 正方向的夹角 $\alpha_1=30°$ 或 $\alpha_2=150°$.

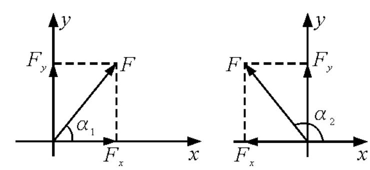

图 11　电场力示意图

(7) 设 B 沿 $-x$ 方向.确定电场方向与 x 轴正方向的夹角为 $-30°$ 或 $-150°$

重复以上第 3 到 6 步讨论,将式(1) ~ (3) 中的磁场力改为 $-f$,可解得

$$F_x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}F \qquad F_y=-\frac{1}{2}F$$

同样,可作出图 12 所示矢量关系的平行四边形,容易得到电场 E 和 x 正方向的夹角 $\alpha_1=-30°$ 或 $\alpha_2=-150°$.

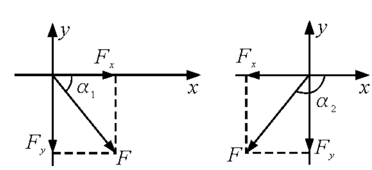

图 12　电场力示意图

例 4 难度非常大,必须有坚实的正交分解法的基础,才有可能使问题得到解决.

从以上几道高考题的解析过程可以看出,应用正交分解法进行矢量运算,总能以不变应万变,因此,熟练掌握正交分解法,对于学习物理是十分重要的,教学中一定要强化,形成良好的思维定势.