大学物理教学

从电磁场应力张量看场对电荷的作用

陈　钢

（苏州大学物理科学与光电·能源学部　江苏 苏州　215006）

（收稿日期:2016－10－07）

摘　要:电磁场应力张量在空间中连续分布,当电荷或电流引入到电磁场空间之中,就会对原有电磁场分布产生扰动,因而引起空间电磁场应力的相互作用.本文利用包围电荷或电流的封闭面上应力作用的计算,指出了其实质是外场与带电体自场的相互作用.

关键词:电磁场应力张量　场相互作用　电荷

库仑发现了电荷与电荷相互作用的基本规律,即库仑定律

$$\boldsymbol{F}=k\frac{q_1q_2}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

库仑定律表明电荷与电荷直接相互作用,这就是"超距"作用,如图1所示.

图1　库仑"超距作用":电荷相互作用

法拉第从物理直觉发现,"超距作用"不符合物理"逐点作用"这种非超空间的基本特征,法拉第天才地发挥想象力,将空间作用形象为某种弹性场而引入"场"概念,电荷之间的相互作用实际上是以"场"为中介的非超距作用,用场概念阐述即场对电荷的作用

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E} \tag{2}$$

这个表达式消除了"超距作用":场对电荷产生作用只在电荷所在空间区域内,电荷所在空间区域以外的场对电荷没有作用,如图2所示.

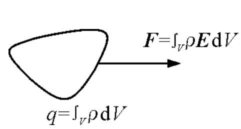

图2　法拉第"非超距作用":场对电荷的作用

现代物理学用电磁场应力张量表达空间场的相互作用

$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\boldsymbol{EE}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB} \tag{3}$$

式中 $\overleftrightarrow{I}$ 为单位张量,此式只有场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 而不显含电荷或电流,因而场应力张量没有空间区域的限制,电磁场应力张量全面准确地表达空间任何区域中应力的分布,揭示场不是"中介",而是相互作用的主体.

【例1】点电荷 q 放在均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中,考察以 q 为中心的球面所受的应力.

解析:空间中只存在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 和静止电荷 q,只存在电场应力作用,场应力张量简化为纯电场形式

$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\boldsymbol{EE}$$

如图3所示,以点电荷 q 为中心取半径为 r 的球面,球面的外法线方向为 $\boldsymbol{n}$.

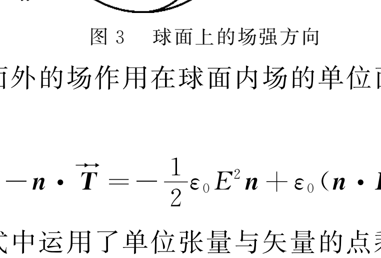

图3　球面上的场强方向

球面外的场作用在球面内场的单位面积上的应力为

$$\boldsymbol{\Gamma}=-\boldsymbol{n}\cdot\overleftrightarrow{T}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{n}+\varepsilon_0(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}$$

上式中运用了单位张量与矢量的点乘关系

$$\boldsymbol{n}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}$$

以 q 为中心的球面所包围的电场部分受到周围电场作用,球面所在处场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_q$$

其中 $\boldsymbol{E}_0$ 为均匀外场,取此方向为直角坐标系 y 轴;$\boldsymbol{E}_q$ 为点电荷 q 所产生的“自场”,$\boldsymbol{E}_q$ 沿球面 $\boldsymbol{n}$ 法线方向,且具球对称性. 因此,由对称性分析可知球面受到的总应力其合力方向沿 $\boldsymbol{E}_0$ 方向,运用直角坐标投影与球坐标的变换关系 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}=\sin\theta\sin\varphi$,计算球面所受总应力沿 y 轴的分量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{j}=\Gamma_y=&-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}+\varepsilon_0(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}=\\&-\frac{1}{2}\varepsilon_0[E_0^2+E_q^2+2\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_q](\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})\\&+\varepsilon_0[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_q)][(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_q)\cdot\boldsymbol{j}]=\\&-\frac{1}{2}\varepsilon_0[E_0^2+E_q^2+2E_0E_q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})](\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})+\\&\varepsilon_0[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})E_0+E_q][E_0(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+E_q(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})]=\\&-\frac{1}{2}\varepsilon_0[E_0^2+E_q^2+2E_0E_q\sin\theta\sin\varphi]\sin\theta\sin\varphi\\&+\varepsilon_0[E_0\sin\theta\sin\varphi+E_q][E_0+E_q\sin\theta\sin\varphi]=\\&\varepsilon_0[E_0E_q+\frac{1}{2}(E_0^2+E_q^2)\sin\theta\sin\varphi]\end{aligned}$$

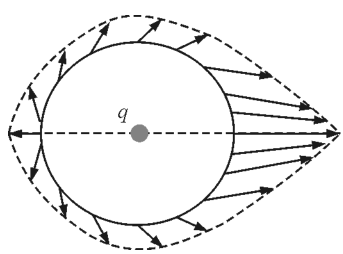

图 4 球面上应力场方向示意

作用在整个球面上的合力大小为

$$\begin{aligned}F=&\oiint_A\Gamma_y\mathrm{d}S=\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[E_0E_q+\\&\frac{1}{2}(E_0^2+E_q^2)\sin\theta\sin\varphi]r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\\&\varepsilon_0E_0E_qr^2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi+\\&\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_0^2+E_q^2)r^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\\&\varepsilon_0E_0E_q4\pi r^2\end{aligned}$$

包围面上的总作用力为

$$F=\varepsilon_0E_0E_q4\pi r^2$$

球面上的力来自于电荷自场 E_q 与原场 E_0 的相互作用,外场对自场的总作用力正比于产生自场的电荷 q,即

$$F=qE_0$$

可得“电荷自场”的大小

$$E_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

进一步考虑到方向关系球面上应力的总和写为矢量关系

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}_0$$

这正是洛伦兹力所表示的电场对电荷的作用力. 由上述求解过程可知,球面包围的电荷受到均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 的作用,实际上是包围点电荷的球面上空间各处 $\boldsymbol{E}_q$ 和 $\boldsymbol{E}_0$ 的相互作用. 设想空间中只存在均匀场 $\boldsymbol{E}_0$,当电荷被引入到电场空间中,电荷产生的场 $\boldsymbol{E}_q$ 使原来的 $\boldsymbol{E}_0$ 场分布被扰动,因而两种场产生相互作用,球面上场作用的应力的总和就是电荷受力,电磁场应力张量揭示了场与场相互作用的实质. 这里为了方便计算了球面上的总应力,实际上包围电荷的任何闭合(高斯)面上场相互作用的应力的总和都等于 $q\boldsymbol{E}_0$.

【例 2】在均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中有线电流 I,电流方向垂直于 $\boldsymbol{B}_0$,以线电流为轴线取圆柱面考察单位长度圆柱体外的场对柱内场的应力.

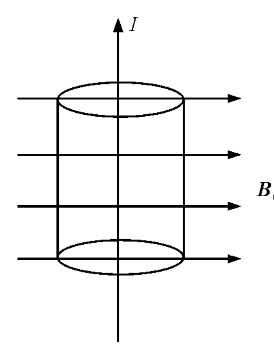

图 5 包围电流 I 的圆柱与场 $\boldsymbol{B}_0$

如图 5 所示,根据轴对称性,圆柱面的上、下底面法向方向相反,如有受力必然大小相同方向相反,因此只须考虑圆柱的侧面上应力的分布,由于磁场分布只在垂直于圆柱轴方向,沿轴应力分布完全相同,因此只须考虑垂直于轴的平面上的应力分布.

圆柱面上的磁场应力张量为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB}$$

圆柱面上沿外法线方向的应力

$$\boldsymbol{\Gamma}=-\boldsymbol{n}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\boldsymbol{n}+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$$

如图 6 所示,圆周表示圆柱的侧面,取平面直角坐标,均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 沿 x 轴,电流 I 产生自场 $\boldsymbol{B}_I$ 沿

圆周切向. 由于磁场是“横场”，不能完全确定圆柱面上总应力的方向，故分别计算应力沿 x 轴和 y 轴的大小.

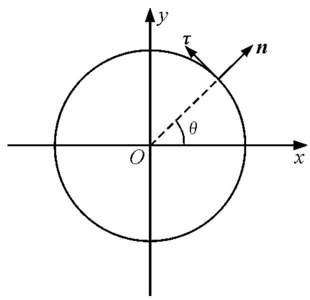

图 6　圆柱周线在 $x-y$ 平面上的法向与切向

空间中存在磁场

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_I$$

注意到下述单位矢量的投影关系

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=\cos\theta\qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}=\sin\theta$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{i}=-\sin\theta\qquad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{j}=\cos\theta$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

x 轴方向的应力

$$\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{i}=\Gamma_x=-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i})+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{i})=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}[(B_0^2+B_I^2+2B_0B_I\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{i})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i})]+$$

$$\frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{n}\cdot B_0\boldsymbol{i}+\boldsymbol{n}\cdot B_I\boldsymbol{\tau})(B_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+B_I\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{i})]=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}[(B_0{}^2+B_I^2-2B_0B_I\sin\theta)\cos\theta]+$$

$$\frac{1}{\mu_0}[(-B_0B_I\cos\theta\sin\theta)]=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(B_0^2+B_I^2)\cos\theta$$

圆柱面上各处 B_I^2 大小保持不变，积分

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=0$$

故应力沿 x 轴的分量总和为零.

y 轴方向的应力为

$$\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{j}=\Gamma_y=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{j})=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}[(B_0^2+B_I^2+2B_0B_I\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{i})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})]+$$

$$\frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{n}\cdot B_0\boldsymbol{i}+\boldsymbol{n}\cdot B_I\boldsymbol{\tau})(B_0\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+B_I\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{j})]=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}[(B_0^2+B_I^2-2B_0B_I\sin\theta)\sin\theta]$$

$$+\frac{1}{\mu_0}[(B_0B_I\cos^2\theta)]=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(B_0^2+B_I^2)\sin\theta+\frac{1}{\mu_0}B_0B_I$$

沿 y 轴方向的应力总和为

$$F_y=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(B_0^2+B_I^2)\sin\theta+\frac{1}{\mu_0}B_0B_I\right)r\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{1}{\mu_0}B_0B_I2\pi r=IB_0$$

考虑方向关系，有 $\boldsymbol{F}=I\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}_0$，磁场对电流的作用只有垂直于 $\boldsymbol{B}_0$ 的应力 F_y，表明磁场对电流的作用是“横场”性质的作用力，磁场对电流的作用等效于包围电流的圆柱面上应力的总和.

洛伦兹力是实验定律，表达了空间中带电体受力的总体效果，实际上空间中场应力的分布是连续的，且不限于带电体所在区域. 电磁场张量准确描述场应力的空间分布，场对电荷或电流的作用其实质是空间中场的相互作用.

参 考 文 献

1　蔡圣善，朱耘. 经典电动力学. 上海：复旦大学出版社，1985

A study about the Effect of Electric Field on the Charge from the Electromagnetic Stress Tensor

Abstract: When the electric charge or the electric current is introduced in the space of electromagnetic field, which can have the perturbation to the original electromagnetism field distribution. This article by the computation of the electromagnetic field stress tensor closed surface surrounding electric charge or electric current points out that the essential significance electromagnetic field to electric charge action is the out－field and the charged body self－field interact.

Key words: electromagnetic field stress tensor; interaction; electric charge