动量守恒定律和角动量守恒定律辨析

郝亚非
（浙江师范大学数理与信息工程学院物理系　浙江 金华　321004）

（收稿日期:2016－10－18）

摘　要:辨析了系统动量守恒和角动量守恒的适用条件,旨在加深学生对动量守恒定律和角动量守恒定律的理解.以 3 个例题为例,根据实际条件选择参数,计算了系统的内力和外力的数值,分析了系统所受合外力(外力力矩的矢量和)远小于系统内力(内力矩)的条件.结果表明,只定性地根据物体的质量很小就得出物体的重力远小于系统内力的结论是不充分的,质量很小的物体的重力是否远小于系统的内力还取决于碰撞前物体的速度;而外力力矩的矢量和是否远小于内力矩不仅取决于碰撞前物体的速度,还取决于碰撞的位置.

关键词:动量　角动量　守恒　力矩　力

动量守恒定律、角动量守恒定律和机械能守恒定律是力学的三大守恒定律.其中,角动量守恒定律适用的条件是[1,2]:

(1) 系统相对于参考点的外力力矩的矢量和为零,即 $\boldsymbol{M}_{ex}=0$.

如果满足如下条件,也可以应用角动量守恒定律.

(2) 系统相对于参考点的外力力矩的矢量和不为零,即 $\boldsymbol{M}_{ex}\neq 0$,但是过程进行的时间极短,且外力力矩的矢量和 $\boldsymbol{M}_{ex}$ 远小于系统的内力矩 $\boldsymbol{M}_{in}$,即 $\boldsymbol{M}_{ex}\ll\boldsymbol{M}_{in}$,外力力矩可以忽略不计,系统的角动量也可以看作守恒.

条件(1) 很容易把握,只要判断出系统所受的合外力相对于参考点的外力力矩的矢量和为零,即可得出系统角动量守恒的结论.条件(2) 比较抽象,很多学生很难准确地理解和把握.以下我们先以力学中常见的两个例题(例 1,例 2) 为例,通过数值计算,直观地给出过程进行时间极短的情况下,外力力矩的矢量和与内力矩的相对大小,分析应用角动量守恒定律的条件(2).

【例 1】质量很小、长度为 L 的均匀细杆,可绕过其中心 O 点并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动.当细杆静止于水平位置时,有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距 O 点为 $\frac{L}{4}$ 处,并背离 O 点向细杆的端点 A 爬行.设小虫与细杆的质量均为 m,问:欲使细杆以恒定的角速度转动,小虫应以多大速率向细杆端点爬行?(不考虑小虫对撞击力的实际承受能力) 示意图如图 1 所示.

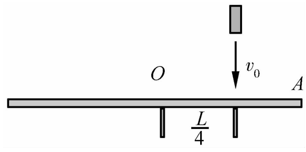

图 1　例 1 示意图

解题思路:将虫与杆作为一个系统,先运用角动量守恒定律求解得到虫与杆碰撞后的角速度,该角速度即为虫向杆端点爬行时杆的恒定角速度,然后运用角动量定理求解虫的爬行速度.

要解决该问题首先需要判断出系统关于 O 点的角动量守恒,而判断系统关于 O 点角动量守恒,需要分析系统所受外力和内力.系统所受外力:支撑点 O 对杆的力、杆的重力、虫的重力,其中支撑点对杆的力和杆的重力的作用线均过 O 点,相对 O 点的力矩均为零,所以外力矩只有虫的重力矩,大小为

$$M_{ex}=mg\frac{L}{4}$$

系统的内力为虫和杆的碰撞力,内力矩大小为

$$M_{in}=F_{in}\frac{L}{4}$$

这是一种外力力矩的矢量和不为零的情况,系统相对于 O 点的角动量是否守恒取决于外力力矩的矢量和是否远小于内力矩.这和文献[3]中的情况

作者简介:郝亚非(1980－　),女,副教授,主要从事物理教学研究工作,研究方向为材料物理.

不同，文献[3] 中外力和内力相对于参考点的力臂不同，外力的力臂远小于内力的力臂，可以得出合外力的力矩远小于内力矩的结论. 本文中，虫的重力和碰撞内力相对于 O 点的力臂相同，虫的重力和碰撞内力相对于 O 点的力矩的大小取决于虫的重力和碰撞内力的相对大小. 通常的分析是：虫的重力很小，远小于系统的内力，所以系统角动量守恒. 但是，这样分析让学生很迷茫，mg 和 F_{in} 都是符号，学生很难直观地得出虫的重力远小于碰撞内力的结论. 如果能够给出 F_{in} 的数值，再分析虫的重力 mg 和系统内力 F_{in} 的相对大小就很容易了.

可以先假定系统相对于 O 点的角动量守恒，即

$$J_{\text{虫}}\omega_0 = (J_{\text{杆}} + J_{\text{虫}})\omega$$

得到虫和杆碰撞后的角速度大小为

$$\omega = \frac{12v_0}{7L}$$

线速度大小为

$$v = \frac{3v_0}{7}$$

然后对虫运用动量定理求解虫受到杆的碰撞内力. 分析虫的受力，虫受重力和杆对它的碰撞内力，根据动量定理，有

$$\int_{t_1}^{t_2} mg\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} F_{\text{in}}\,\mathrm{d}t = mv - mv_0$$

内力的冲量可以用 t_1 到 t_2 时间段内平均内力 $\overline{F}_{\text{in}}$ 的冲量表示，即

$$mg\Delta t - \overline{F}_{\text{in}}\Delta t = mv - mv_0$$

碰撞时间很短，可以取 $\Delta t = 0.001\ \text{s}$，求得平均碰撞内力大小为

$$\overline{F}_{\text{in}} = \left(1 + \frac{400v_0}{7}\right)mg$$

其中重力加速度近似为 $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. 可以看出杆对虫的碰撞内力 $\overline{F}_{\text{in}}$ 大于虫的重力 mg，但是 $\overline{F}_{\text{in}}$ 是否远大于 mg 还取决于虫碰撞杆之前的速率 v_0. 只要 $v_0 > 0.1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$\overline{F}_{\text{in}} \gg mg$ 的条件就成立，系统相对于 O 点的外力力矩的矢量和远小于内力矩的条件也就成立了，系统相对于 O 点的角动量守恒. 但是若 $v_0 < 0.01\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，则 $\overline{F}_{\text{in}}$ 的数值趋近于虫的重力 mg，$\overline{F}_{\text{in}} \gg mg$ 的条件不成立，系统相对于 O 点的外力力矩的矢量和不会远小于内力矩，系统相对于 O 点的角动量不守恒.

【例 2】一个沙袋用质量忽略不计的绳悬挂于 O 点，一颗子弹以水平速度 v_0 击入沙袋，并和沙袋以同样的速度运动，子弹和沙袋构成的系统动量和角动量是否守恒？(不考虑子弹和沙袋的大小)示意图如图 2 所示.

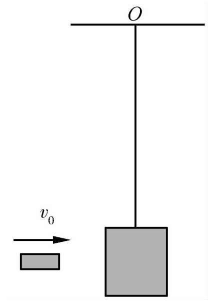

图 2 例 2 示意图

解题思路：子弹要击入沙袋，v_0 需要达到一定数值才可以，取 $v_0 = 200\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. 根据对例 1 的分析，这种情况下，子弹和沙袋构成的系统关于 O 点的角动量守恒. 因为沙袋的重力和绳子的拉力相对于 O 点的力矩为零，系统的外力力矩的矢量和为子弹的重力矩，远小于系统的内力矩.

系统的动量是否守恒呢？

动量守恒定律适用的条件是[1,2]：

(1) 系统所受的合外力为零，即 $\boldsymbol{F}_{\text{ex}} = 0$，系统的总动量保持不变.

(2) 系统所受的合外力不为零，即 $\boldsymbol{F}_{\text{ex}} \neq 0$，但是合外力在某个坐标轴上的分量为零，系统的总动量虽不守恒，但沿该坐标轴的分动量却是守恒的.

在实际问题中，如果满足如下条件，也可以应用动量守恒定律.

(3) 系统所受的合外力不为零，即 $\boldsymbol{F}_{\text{ex}} \neq 0$，但是过程进行的时间极短，且合外力远小于系统的内力 $\boldsymbol{F}_{\text{in}}$，即 $\boldsymbol{F}_{\text{ex}} \ll \boldsymbol{F}_{\text{in}}$，可以忽略外力对系统的作用，认为系统的总动量守恒，如碰撞、打击、爆炸.

首先，例 2 符合条件(2)，沿 x 轴方向系统所受合外力为零，沿 x 轴方向的动量守恒. 在碰撞前后瞬间，系统沿 y 轴方向的速度为零，系统的总动量是否守恒呢？这需要用条件(3) 来判断，该条件也很抽象，学生也不容易理解和把握.

接下来，我们仍以力学中常见的两个例题(例 2，例 3) 为例，通过数值计算，直观地给出过程进行时间极短的情况下，系统所受的合外力和内力的相对大小，分析应用动量守恒定律的条件(3).

子弹击入沙袋前的速率取 $v_0 = 200\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，子弹质量 $m_z = 0.01\ \text{kg}$，沙袋质量 $m_s = 10\ \text{kg}$，碰撞时间 $\Delta t = 0.01\ \text{s}$，绳长 $L = 1\ \text{m}$. 根据角动量守恒定律，有

$$J_z\omega_0 = (J_z + J_s)\omega$$

可求得子弹击入沙袋后的角速度大小为

$$\omega = 0.2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

线速度大小为

$$v = L\omega = 0.2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(忽略沙袋沿 y 轴方向的尺寸). 设子弹沿水平方向受到的平均碰撞内力为$\overline{F}_{in}$，对子弹运用动量定理，有

$$-\overline{F}_{in}\Delta t = m_z v - m_z v_0$$

求得 $$\overline{F}_{in} = 199.8\ \mathrm{N}$$

子弹击入沙袋前系统的合外力为子弹的重力，大小为 $F_{ex} = 0.1\ \mathrm{N}$，$F_{ex} \ll \overline{F}_{in}$；子弹击入沙袋后系统的合外力为子弹和沙袋共同转动所需的向心力，为

$$F_{ex} = (m_z + m_s)\frac{v^2}{L}$$

$F_{ex} = 0.4\ \mathrm{N}$，$F_{ex} \ll \overline{F}_{in}$，满足条件(3)，所以系统动量守恒.

【例 3】一个长度为 L 的刚性杆悬挂于 O 点，可绕 O 点自由转动，一颗子弹以水平速度 v_0 击入杆，并和杆以同样的速度运动，子弹和杆构成的系统动量和角动量是否守恒?(不考虑杆的横向线度) 示意图如图 3 所示.

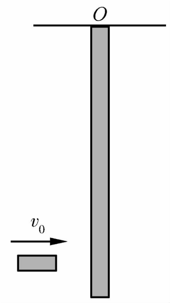

图 3　例 3 示意图

解题思路:根据前两个例题的分析可知，子弹和杆构成的系统角动量守恒.

系统动量是否守恒呢?

对系统做受力分析，系统所受外力：子弹和杆的重力，以及 O 点对杆的作用力；系统的内力：子弹和杆的碰撞内力. 首先系统所受的合外力不为零，是否满足动量守恒的条件(3) 呢?文献[4] 中指出，水平方向动量是否守恒取决于子弹击入杆的位置，只有击入点到 O 点的距离满足 $d = \frac{2}{3}L$ 时，系统沿水平方向的动量才会守恒. 我们可以从另一个角度来分析系统沿水平方向的动量是否守恒，即，通过分析水平方向系统的合外力(O 点对杆的水平作用力 F_x) 和系统平均碰撞内力$\overline{F}_{in}$ 的相对大小来判断是否满足动量守恒的条件(3).

仍然可以根据一些实际的数据计算系统沿水平方向所受的合外力和系统平均碰撞内力的相对大小. 子弹击入杆前的速度取 $v_0 = 300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，子弹质量 $m_z = 0.01\ \mathrm{kg}$，杆的质量 $m_g = 3\ \mathrm{kg}$，碰撞时间 $\Delta t = 0.01\ \mathrm{s}$，杆长 $L = 1\ \mathrm{m}$，子弹击入杆之前系统的动量为子弹的动量 $p_0 = 3\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. 设击入点到 O 点的距离 d 为$\frac{2}{3}L$，根据系统相对于 O 点的角动量守恒，计算得到碰撞后子弹和杆的角速度大小为 $\omega \approx 2\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$，子弹的线速度为 $v_z = \frac{4}{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，动量为 $p_z = 0.013\,3\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. 杆上每一点的速度均不同，其中质心的线速度 $v_c = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，假设杆的质量都集中于质心来估算杆的动量为 $p_c = 3\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. 可以看出 $p_c + p_z \approx p_0$，系统沿水平方向动量守恒. 对子弹沿水平方向运用动量定理，求得子弹和杆的平均碰撞内力为$\overline{F}_{in} = 299\ \mathrm{N}$. 再对杆的质心运用动量定理

$$\overline{F}_{in}\Delta t + F_x \Delta t = m_g v_c$$

求得 O 点对杆的水平作用力 $F_x = 1\ \mathrm{N}$. 所以沿水平方向系统所受的合外力远小于系统的内力，系统沿水平方向的动量守恒.

同样，可以计算击入点到 O 点的距离 d 大于$\frac{2}{3}L$ 时，系统的平均碰撞内力和 O 点对杆的水平作用力. 取 $d = L$，求得系统的平均碰撞内力$\overline{F}_{in} = 297\ \mathrm{N}$，$O$ 点对杆的水平作用力 $F_x = 153\ \mathrm{N}$，F_x 方向与子弹对杆的平均碰撞内力的方向相同. 还可以计算 $d < \frac{2}{3}L$，系统的内力和 O 点对杆的水平作用力. 取 $d = \frac{1}{3}L$，求得系统的碰撞内力$\overline{F}_{in} \approx 300\ \mathrm{N}$，$O$ 点对杆的水平作用力 $F_x = -150\ \mathrm{N}$，F_x 方向与子弹对杆的平均碰撞内力的方向相反. 很显然，这两种情况下，系统沿水平方向上所受的合外力 F_x 不会远小于系统的平均碰撞内力$\overline{F}_{in}$，系统沿水平方向动量不守恒，这和文献[4] 的结论是一样的.

综上所述，判断系统所受合外力(外力力矩的矢量和) 是否远小于系统内力(内力矩) 时，只定性地根据物体的质量很小就得出物体的重力远小于系统的内力的结论是不充分的，质量很小的物体的重力是否远小于系统的内力还取决于碰撞前物体的速度，而外力力矩的矢量和是否远小于内力矩不仅取决于碰撞前物体的速度，还取决于碰撞的位置. 本文通过 3 个例题，计算了系统的内力，并和系统所受的合外力进行比较，分析系统所受合外力(外力力矩的矢量和) 远小于系统内力(内力矩) 的条件. 本文中所举的 3 个例题都是力学中常见的例题，通过数值计算的方法，能够加深学生对动量守恒定律和角动

浅谈量子力学中观察方法的问题

吴　柯
（咸阳市渭城高级职业中学　陕西 咸阳　712000）

（收稿日期:2016－05－18）

摘　要:描述了量子力学中的观测方法,其中包括测不准原理、贝尔不等式、薛定谔之猫,最后给出了测不准原理的一个区间,也许会对量子力学的观测方法的完备性有一些进展.量子力学的观测问题从一开始就存在,直到量子力学发展的全盛时期,它的完备性也是研究量子力学的物理学家争论最多的问题,文章就这些问题做出描述,以及一些对观测方法的新观点.

关键词:测不准原理　贝尔不等式　薛定谔之猫　量子力学

1　引言

20 世纪,物理学存在一个飞速发展时期,相对论和量子力学的物理分支分别形成,其中基本相对论原理表述了宏观物体的运动效应,和牛顿力学的不足之处.量子力学在微观粒子的实验效应里展示了它的闪光点,量子力学是反映微观粒子运动的最好的实验效应.量子论发展在 19 世纪初,开始由普朗克等人从黑体辐射建立了基础理论,并发展至今,形成了量子力学.

在科学发展的不断进步下,量子论逐渐成熟,形成了量子力学.量子力学具体叙述了微观系统中粒

量守恒定律的理解,对学生剖析、深刻理解相关物理规律在类似问题中的应用也是有所帮助的.

参 考 文 献

1　马文蔚，解希顺，周雨青. 物理学. 北京：高等教育出版社，2006
2　赵近芳，王登龙. 大学物理学(第 4 版). 北京：北京邮电大学出版社，2015
3　邱晓燕，唐志海. 一道力学碰撞问题中动量守恒与角动量守恒辨析. 物理教学探讨，2011，29(433)：40 ～ 41
4　王宗昌. 木棒和子弹组成系统的动量守恒问题. 南阳师范学院学报，2005，4(9)：36 ～ 37

Analysis on the Conservation Laws of Momentum and Angular Momentum

Hao Yafei
（Physics Department，Zhejiang Normal University，Jinhua，Zhejiang　321004）

Abstract:This paper analyzes the application conditions of the conservation laws of momentum and angular momentum，helping students to come to a better understanding of these two laws. By analyzing three examples，and choosing parameters，the values of internal force and resultant external force are calculated，and the conditions that resultant external force (resultant external moment) is far less than internal force (internal moment) are analyzed. The results show that it is imprecise to come to the conclusion that the gravity of the object with very small mass is far less than internal force，whether the gravity of object is far less than internal force also depends on the preceding collision velocity of the object. Whether the resultant external moment is far less than internal moment depends on not only preceding collision velocity of the object but also the collision location.

Key words:momentum；angular momentum；conservation；moment；force