怎样论证万有引力与质量乘积成正比

张福林

（北京市顺义区第一中学 北京 101300）

（收稿日期：2016－10－28）

摘 要：在高中物理教学中，论证万有引力与质量乘积成成正比时普遍存在论证不够清晰的现象．为此，给出了 3 种论证方法并进行了比较，以求对物理教学有所启发．

关键词：论证 万有引力 质量

1 引子与问题

如果假设行星绕太阳做圆轨道运动，已知轨道半径为 r，行星的公转周期为 T，行星的质量为 m，如图 1 所示．

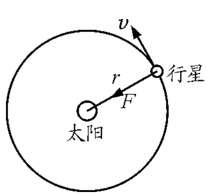

图 1 行星绕太阳做圆轨道运动

太阳对行星的引力 F 提供行星所需的向心力，即

$$F=m\frac{v^2}{r}$$

将

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

代入得

$$F=4\pi^2\left(\frac{r^3}{T^2}\right)\frac{m}{r^2} \tag{1}$$

由开普勒第三定律有

$$\frac{r^3}{T^2}=k$$

代入式(1) 后得到

$$F=4\pi^2 k\frac{m}{r^2} \tag{2}$$

由此，我们可以得知行星和太阳之间的引力跟行星质量成正比，跟行星到太阳的距离的二次方成反比，也就是

$$F\propto\frac{m}{r^2}$$

到此并没有得到行星和太阳之间的引力跟行星质量与太阳质量的乘积成正比．

如何在 $F=4\pi^2 k\frac{m}{r^2}$ 的基础上得到行星和太阳之间的引力跟行星质量与太阳质量的乘积成正比呢？

2 问题的解决

方法 1：

从太阳与行星间相互作用的角度来看，两者的地位是相同的．也就是说，既然太阳吸引行星，行星也必然吸引太阳．就行星对太阳的引力 F' 来说的大小应该与太阳的质量 M 成正比，也就是

$$F'\propto\frac{M}{r^2}$$

由牛顿第三定律，行星吸引太阳的力跟太阳吸引行星的力，大小相等且具有相同的性质．既然这个引力与行星的质量成正比，当然也应该和太阳的质量成正比．因此如用 M 表示太阳的质量，则有

$$F\propto\frac{Mm}{r^2}$$

写成等式

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

此种方法的欠缺是,由 $F\propto\frac{m}{r^2}$ 及 $F'\propto\frac{M}{r^2}$ 得到 $F\propto\frac{Mm}{r^2}$ 的过程中,数学论证不够清晰.

方法 2:

前面已经得到太阳对行星的引力为

$$F=4\pi^2k\frac{m}{r^2}$$

将

$$F=4\pi^2k\frac{m}{r^2}$$

整理成

$$F=\left(\frac{4\pi^2k}{M}\right)\frac{Mm}{r^2}$$

令

$$G=\left(\frac{4\pi^2k}{M}\right)$$

则

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

此种方法比较简洁,但缺欠是由于并没有说清 k 与 M 的关系,从而不知 $\left(\frac{4\pi^2k}{M}\right)$ 是否为常数.

方法 3:

前面已经得到太阳对行星的引力为

$$F=4\pi^2k\frac{m}{r^2}$$

根据对称性可得,行星对太阳的作用力 F' 也应有同样的表达形式

即

$$F'=4\pi^2k'\frac{M}{r^2}$$

根据牛顿第三定律有

$$F=F'$$

即

$$4\pi^2k\frac{m}{r^2}=4\pi^2k'\frac{M}{r^2}$$

进而有

$$km=k'M$$

令

$$km=k'M=C$$

则

$$M=\frac{C}{k'}\qquad m=\frac{C}{k}$$

将

$$F=4\pi^2k\frac{m}{r^2}$$

整理成

$$F=\left(\frac{4\pi^2k}{M}\right)\frac{Mm}{r^2}$$

把 $M=\frac{C}{k'}$ 代入得

$$F=\left(\frac{4\pi^2kk'}{C}\right)\frac{Mm}{r^2}$$

将 $F'=4\pi^2k'\frac{M}{r^2}$ 整理成

$$F'=\left(\frac{4\pi^2k'}{m}\right)\frac{Mm}{r^2}$$

把 $m=\frac{C}{k}$ 代入得

$$F'=\left(\frac{4\pi^2kk'}{C}\right)\frac{Mm}{r^2}$$

引入一个系数 $G=\frac{4\pi^2kk'}{C}$,则公式

$$F=\frac{4\pi^2kk'}{C}\frac{Mm}{r^2}$$

$$F'=\frac{4\pi^2kk'}{C}\frac{Mm}{r^2}$$

可统一写成等式

$$F=F'=G\frac{Mm}{r^2}$$

对 3 种论证方法相比较而言,第 3 种方法论据明确、论证过程清晰、最为严密.

参考文献

1 张维善.普通高中课程标准实验教科书物理必修 2.北京:人民教育出版社,2010.37 ~ 38

2 (日)山田弘著.物理学超入门.郭长江,译.上海:世界图书出版社公司出版,2009.44 ~ 45

3 (美)I·伯纳德·科恩著.新物理学的诞生.张卜天,译.长沙:湖南科学技术出版社.2010.142

4 刘斌.力学.合肥:中国科学技术大学出版社,2013.103