弹簧双振子运动规律的一般性研究

—— 基于质心和质心运动定理的分析

李涵琪

（江苏省姜堰第二中学　江苏 泰州　225500）

（收稿日期：2016－12－07）

1　问题的提出

弹簧双振子是弹簧问题中较为复杂的一类问题，以此模型设置成的系统动力学和能量转化问题在大学自主招生、物理竞赛中常有涉及. 由于其物理过程非常复杂、运动情景难以想象，因而对学生分析和解决问题的能力提出了很高的要求.

对于弹簧双振子运动规律的分析，目前大部分参考资料都是以质心为参考系（非惯性系），借助于惯性力对几种特殊的弹簧双振子模型的动力学特征进行分析，并用运动的合成求振子的运动方程、速度等物理量，并未对一般情况下的双振子问题进行研究. 另外，在用非惯性系分析弹簧双振子的运动问题时，要想快速而准确地确定物体在非惯性系中的平衡位置，以及物体离开平衡位置的位移等相关物理量时，有一定的难度，且列出的动力学表达式也略显繁琐，尤其是遇到多个恒力作用或者振子具有一定的初速度等类型的弹簧双振子.

那么一般情况下弹簧双振子的运动规律是什么?除了应用非惯性系，我们能否有其他较为简便的方法研究其运动规律呢？

本文拟在地面坐标系中，借助于质心和质心运动定理分析一般情况下弹簧双振子的运动规律，作为对以上方法的一个补充.

2　弹簧双振子的一般模型

如图 1 所示，光滑水平面上有两个质量分别为 m_A 和 m_B 的物体 A 和 B，两物体固连在轻质弹簧两

理核心素养是指学生在接受物理教育过程中逐步形成的适应个人终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力，是学生通过物理学习内化的带有物理学科特性的品质[4]. 针对其中科学思维之科学推理，笔者认为当下的高中物理习题教学对提升学生此素养的作用有限，而造成这一现状的主要责任在教师. “急功近利” 的心态和“舍繁取简” 的趋势必须得到扭转，否则学生不是在科学推理而是在生搬硬套，不是在自主体验过程而是在被动接受. 训练复杂推理的思维能力有助于素养的养成，素养的养成将反映在学生分析和解决问题的能力上，特别是自主、自我激励和创新等必备品格和关键能力上.

教育是农业，有一个育种、播种、生长的过程，教师不能心中只想着收获，那是严重的“揠苗助长”. 有些母亲喂小孩饭菜，总喜欢弄得很碎，甚至到自己嘴里嚼碎再喂给小孩，那样不仅有大量的营养流失，且剥夺了小孩咀嚼能力的逐步培养和独立吃饭的早日实现. 这是“急于求成” 的表现，高中物理教师要避免犯类似的错误，不要刻意追求技巧和捷径. 提升学生核心素养才是教学的根本目标，学科教学只是实现的途径，核心素养是学生的而非学科的. 教育给予人们的无非是当一切已学过的东西都忘记后所剩下的东西，物理学研究的事实和结论可能被学生忘记，但其思想方法、研究态度一定能够长久地支持学生的学习、生活和工作[2].

参 考 文 献

1　钟启泉. 基于核心素养的课程发展：挑战与课题. 全球教育展望，2016(1)：3 ～ 25

2　林钦，陈峰，宋静. 关于核心素养导向的中学物理教学的思考. 课程·教材·教法，2015(2)：90 ～ 95

3　李艺，钟柏昌. 谈“核心素养”. 教育研究，2015(9)：17 ～ 23

4　张新华. 教学设计视角：关注学生的物理核心素养. 物理教学，2016(5)：7 ～ 10

端，弹簧的劲度系数为κ，自由长度为l_0，初始时刻的长度为l. 物体A和B在恒力F_A和F_B的作用下分别以初速度v_{A0}和v_{B0}沿水平方向运动，假设运动过程中弹簧始终处于弹性限度内，试分析任一时刻两个物体的运动规律.

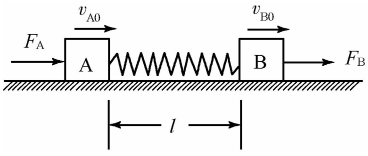

图 1 弹簧双振子模型

3 运动方程的分析

3.1 质心位置的确定

建立地面坐标系Ox，原点O在A的初始位置. 在时刻t，用x_A和x_B分别表示A，B两个物体的位置，可知

$$x_A(0)=0 \qquad x_B(0)=l$$

质心C的坐标

$$x_C=\frac{m_A x_A+m_B x_B}{m_A+m_B}$$

且初始时刻

$$x_C(0)=\frac{m_B}{m_A+m_B}l$$

初速度

$$v_C(0)=\frac{m_A v_{A0}+m_B v_{B0}}{m_A+m_B}$$

系统的合外力为F_A+F_B，由质心运动定理可知

$$F_A+F_B=(m_A+m_B)a_C$$

结合初始时刻，可得

$$x_C=x_C(0)+v_C(0)t+\frac{1}{2}a_C t^2=$$

$$\frac{m_B}{m_A+m_B}l+\frac{m_A v_{A0}+m_B v_{B0}}{m_A+m_B}t+\frac{F_A+F_B}{2(m_A+m_B)}t^2 \tag{1}$$

3.2 振子的运动方程

对于A，有

$$m_A\frac{d^2 x_A}{dt^2}=F_A+\kappa(x_B-x_A-l_0) \tag{2}$$

对于B，有

$$m_B\frac{d^2 x_B}{dt^2}=F_B-\kappa(x_B-x_A-l_0) \tag{3}$$

将式(3)乘以m_A，式(2)乘以m_B，并相减，有

$$m_A m_B\left(\frac{d^2 x_B}{dt^2}-\frac{d^2 x_A}{dt^2}\right)=$$

$$-\kappa(m_A+m_B)(x_B-x_A-l_0)+m_A F_B-m_B F_A$$

整理得

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_B-x_A)=$$

$$-\frac{\kappa(m_A+m_B)}{m_A m_B}\left[x_B-x_A-l_0-\frac{m_A F_B-m_B F_A}{\kappa(m_A+m_B)}\right] \tag{4}$$

应用数学变换，将上式进一步写成

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[x_B-x_A-l_0-\frac{m_A F_B-m_B F_A}{\kappa(m_A+m_B)}\right]=$$

$$-\frac{\kappa(m_A+m_B)}{m_A m_B}\left[x_B-x_A-l_0-\frac{m_A F_B-m_B F_A}{\kappa(m_A+m_B)}\right] \tag{5}$$

令
$$\omega^2=\frac{\kappa(m_A+m_B)}{m_A m_B}$$

$$z=x_B-x_A-l_0-\frac{m_A F_B-m_B F_A}{\kappa(m_A+m_B)}$$

则式(5)可写成

$$\frac{d^2 z}{dt^2}+\omega^2 z=0$$

这是一个简谐振动的动力学方程，其解可写作

$$z=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

即

$$x_B-x_A-l_0-\frac{m_A F_B-m_B F_A}{\kappa(m_A+m_B)}=A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{6}$$

其中A和φ_0是待定常数，由初始条件来决定.

由式(1)并结合$x_C=\dfrac{m_A x_A+m_B x_B}{m_A+m_B}$，有

$$m_A x_A+m_B x_B=$$

$$m_B l+(m_A v_{A0}+m_B v_{B0})t+\frac{F_A+F_B}{2}t^2 \tag{7}$$

将式(6)与式(7)联立，可得A，B两个物体的运动方程分别为

$$x_A=\frac{m_B}{m_A+m_B}(l-l_0)-\frac{m_B(m_A F_B-m_B F_A)}{\kappa(m_A+m_B)^2}+\frac{m_A v_{A0}+m_B v_{B0}}{m_A+m_B}t+\frac{F_A+F_B}{2(m_A+m_B)}t^2-\frac{m_B}{m_A+m_B}A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{8}$$

$$x_B=\frac{m_A l_0+m_B l}{m_A+m_B}+\frac{m_A(m_A F_B-m_B F_A)}{\kappa(m_A+m_B)^2}+\frac{m_A v_{A0}+m_B v_{B0}}{m_A+m_B}t+\frac{F_A+F_B}{2(m_A+m_B)}t^2+\frac{m_A}{m_A+m_B}A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{9}$$

下面结合初始条件来求 A 和 φ_0.

当 $t=0$ 时,有

$$z(0)=x_B(0)-x_A(0)-l_0-\frac{m_AF_B-m_BF_A}{\kappa(m_A+m_B)}$$

即

$$l-l_0-\frac{m_AF_B-m_BF_A}{\kappa(m_A+m_B)}=A\cos\varphi_0 \qquad (10)$$

又因为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dx_B}{dt}-\frac{dx_A}{dt}=$$

$$v_B-v_A=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

有

$$v_{B0}-v_{A0}=-A\omega\sin\varphi_0 \qquad (11)$$

由式(10) 和式(11) 可解得

$$A=\sqrt{\left(\frac{v_{A0}-v_{B0}}{\omega}\right)^2+\left[l-l_0-\frac{m_AF_B-m_BF_A}{\kappa(m_A+m_B)}\right]^2} \qquad (12)$$

$$\tan\varphi_0=\frac{v_{A0}-v_{B0}}{\omega\left[l-l_0-\frac{m_AF_B-m_BF_A}{\kappa(m_A+m_B)}\right]} \qquad (13)$$

以上分析过程思路清晰、简单,而如果在非惯性系中求解上述两个运动方程,其分析和运算过程将异常繁琐,读者可以一试进行比较.

4　速度和加速度的变化规律

将式(8) 和式(9) 分别对时间求一阶和二阶导数,即可得到振子的速度和加速度的方程.

$$v_A=\frac{m_Av_{A0}+m_Bv_{B0}}{m_A+m_B}+\frac{F_A+F_B}{m_A+m_B}t+\frac{m_B}{m_A+m_B}A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$v_B=\frac{m_Av_{A0}+m_Bv_{B0}}{m_A+m_B}+\frac{F_A+F_B}{m_A+m_B}t-\frac{m_A}{m_A+m_B}A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$a_A=\frac{F_A+F_B}{m_A+m_B}+\frac{m_B}{m_A+m_B}A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$a_B=\frac{F_A+F_B}{m_A+m_B}-\frac{m_A}{m_A+m_B}A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

下面列举一例说明以上规律的应用.

【例题】如图 2 所示,在一个劲度系数为 κ 的轻质弹簧两端(两端绝缘)分别拴着荷质比为 $\frac{q_A}{m_A}$ 和 $\frac{q_B}{m_B}$ 的两个带正电的小球,且 $\frac{q_A}{m_A}=\frac{q_B}{m_B}$. 系统置于光滑水平面上. 有匀强电场 E 沿弹簧水平向右,此时弹簧的长度为 l. 现将细线烧断,试确定在任意时刻 A 和 B 所处的位置.(A 和 B 两物体的相互作用忽略不计)

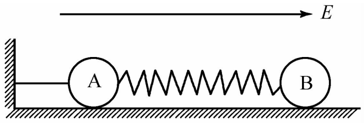

图 2　例题图

解析: 本题中,$F_A=Eq_A$,$F_B=Eq_B$,$v_{A0}=v_{B0}=0$.

当系统静止时,有

$$\kappa(l-l_0)=Eq_B$$

得

$$l_0=l-\frac{Eq_B}{\kappa}$$

由式(12) 和式(13) 可得

$$A=\frac{Eq_B}{\kappa} \qquad \varphi_0=0$$

代入式(8) 和式(9),可得振子的运动方程为

$$x_A=\frac{E(q_A+q_B)}{2(m_A+m_B)}t^2+\frac{m_BEq_B}{(m_A+m_B)\kappa}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{(m_A+m_B)\kappa}{m_Am_B}}t\right)\right]$$

$$x_B=l+\frac{E(q_A+q_B)}{2(m_A+m_B)}t^2-\frac{m_AEq_B}{(m_A+m_B)\kappa}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{(m_A+m_B)\kappa}{m_Am_B}}t\right)\right]$$

5　结束语

以上我们在地面坐标系中用质心和质心运动定理并结合适当的数学变换得出了一般情况下弹簧双振子的运动规律,所采用的方法和得到的结论具有普适性,一般参考资料中所列的只不过是其中的一些特殊情况而已.

对于具体问题中的弹簧双振子,我们只需根据题中所给的条件,代入前面所求的表达式即可求得振子的运动方程及相关物理量. 需要注意的是:

(1) 此处的地面坐标系 Ox,原点 O 在 A 的初始位置,而非质心 C 处;

(2) 如果振子所受的外力、初速度方向与图 1 中方向相反,则在计算时该外力和初速度应取负值代入.

当然,对于本文所得出的结论,我们没有必要去记住其表达式的具体内容,这里仅仅提供一种方法,供读者参考.