对一道带电粒子在磁场中运动的问题的讨论

赵相争
（沧州市第二中学 河北 沧州 061001）

（收稿日期:2016 - 12 - 15）

摘 要:一道高中《物理·选修 3 - 1》第三章中带电粒子在磁场中运动的问题,运用到了圆形磁场的结论,即从一点进入圆形磁场的所有粒子如果轨迹半径都等于磁场的半径,则这些粒子经磁场偏转后都平行穿出,且都垂直于过入射点的直径,而这些粒子又分为两部分,偏转一侧 90° 范围内的粒子仅需一“梭形” 区域即可穿出,而另一侧 90° 范围内的粒子,则需要整个圆形磁场“剪去”那个“梭形”区域剩余部分的磁场. 可能出题人都仅注意到了这一结论,忽视了此过程具有可逆性,故给出的答案有些值得讨论的地方,其实利用可逆性,只需 3 个“梭形” 磁场便可解决,也完全符合题目要求.

关键词:半径相同 偏转 垂直 面积最小

有一道很常见的涉及圆形磁场的问题,好多参考书上(及网上) 给出的答案都是一样的,而笔者认为这种答案是有问题的,现与广大物理同仁讨论一下. 原题如下.

如图 1 所示,质量为 m,电荷量为 e 的电子从坐标原点 O 处沿 xOy 平面射入第一象限内,射入时的速度方向不同,但大小均为 v_0. 现在某一区域内加一方向向外且垂直于 xOy 平面的匀强磁场,磁感应强度大小为 B,若这些电子穿过磁场后都能垂直地射到与 y 轴平行的荧光屏 MN 上,求:

(1) 荧光屏上光斑的长度;

(2) 所加磁场范围的最小面积.

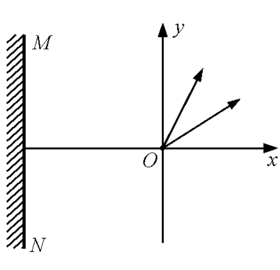

图 1 原题题图

笔者搜索了大量资料,包括参考书及网上搜索,此题给出的答案都是一样的,现抄录如下.

解析:(1) 如图 2 所示,要求光斑的长度,只要找到两个边界点即可. 初速度沿 x 轴正方向的电子沿弧 OA 运动到荧光屏 MN 上的 P 点;初速度沿 y 轴正方向的电子沿弧 OC 运动到荧光屏 MN 上的 Q 点.

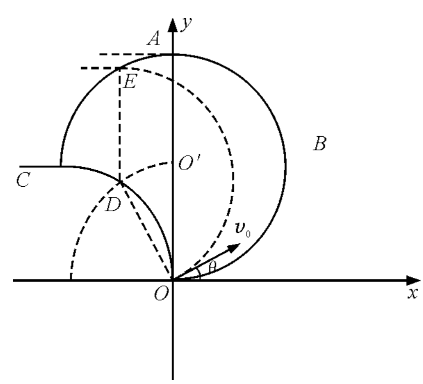

图 2 解析用图

设粒子在磁场中运动的半径为 R ,由牛顿第二定律得

$$ev_0B = m\frac{v_0^2}{R}$$

即

$$R = \frac{mv_0}{Be}$$

由几何知识可得

$$PQ = R = \frac{mv_0}{Be}$$

(2) 取与 x 轴正方向成 θ 角的方向射入的电子

为研究对象，其射出磁场的点为 $E(x,y)$，因其射出后能垂直打到屏 MN 上，故有

$$x=-R\sin\theta$$

$$y=R+R\cos\theta$$

即

$$x^2+(y-R)^2=R^2$$

又因为电子沿 x 轴正方向射入时，射出的边界点为 A 点；沿 y 轴正方向射入时，射出的边界点为 C 点，故所加最小面积的磁场的边界是以 $(0,R)$ 为圆心、R 为半径的圆的一部分，如图 2 中实线圆弧所围区域，所以磁场范围的最小面积为

$$S=\frac{3}{4}\pi R^2+R^2-\frac{1}{4}\pi R^2=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{mv_0}{Be}\right)^2$$

［答案］ (1) $\frac{mv_0}{Be}$；(2) $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{mv_0}{Be}\right)^2$.

笔者经过分析后，发现此题第(2)问的答案有错误，可能是做题人(或出题人)只分析了一个圆形磁场两部分的作用，只想一次性偏转过去. 对好多认识这种规律的人来说可能还感到挺到位、挺深刻. 其实按题目要求，此题的正确答案所求出的磁场面积还要小一些.

按题目所给条件和要求，第一，MN 屏的长度没有限制；第二，要求磁场面积最小. 那我们先做一双向运动分析：

(1) 如果粒子从同一点射入磁场，轨迹半径等于磁场半径时，夹角 90° 范围内的粒子偏转出去仅需一“梭形”区域，如图 3 中左侧部分，从原点射入第一象限的所有粒子，都从实线所示的区域中穿出，且都平行，并直于过入射点的直线(x 轴).

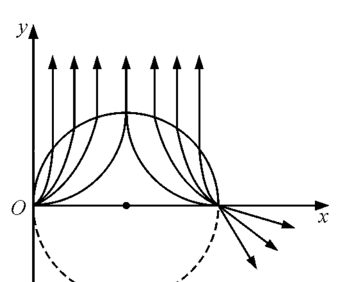

图 3　第一象限内的两个“梭形”磁场的分析

(2) 同理平行进入圆形磁场的粒子，当轨迹半径等于磁场半径时，宽度为半径的所有粒子也仅需一同样的“梭形”区域就可射向一点，并在 90° 夹角范围内穿出，如图 3 中右侧部分.

以上的原理可用“菱形”方法证明，高中物理教师对这一结论都很熟悉，在这里就不再赘述.

那我们利用以上两条规律，可结合一下，来一个“发散”→“平行”→“发散”→“平行”的过程，完全可达到题目中垂直打在 MN 屏上的要求，如图 4 所示，从原点 O 处进入第一象限的粒子经“梭形”磁场 1 偏转后变平行，再被“梭形”磁场 2 偏转，汇聚到 P 点，再由 P 点进入“梭形”磁场 3，被磁场 3 偏转后平行穿出恰好垂直打在 MN 屏上.

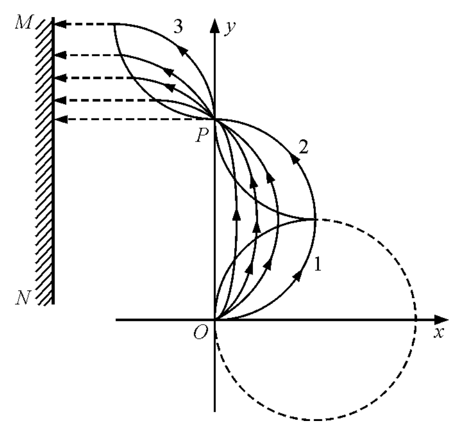

图 4　3 个“梭形”磁场的分析

这 3 个“梭形”磁场的总面积为

$$S=\left(\frac{3\pi}{2}-3\right)\left(\frac{mv_0}{Be}\right)^2$$

显然此值小于原答案中 $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{mv_0}{Be}\right)^2$ 的值.

笔者认为此解法并不违备题目中垂直打在 MN 屏上的要求，只是位置偏上了一些，但题目中并未限定 MN 屏的高度，故完全符合题目要求，所以最小磁场的面积应为

$$S=\left(\frac{3\pi}{2}-3\right)\left(\frac{mv_0}{Be}\right)^2$$