

引入转动惯量减小重力加速度测量的系统误差*

张巧明

(西南大学物理科学与技术学院 重庆 400715)

李青燕

(西南大学科学教育研究中心 重庆 400715)

卢晨蕾

(重庆市人和中学 重庆 400052)

贾伟尧

(西南大学物理科学与技术学院 重庆 400715)

(收稿日期:2016-12-20)

摘要:把刚体模型理论中的转动惯量等引入到单摆测量系统中进行误差修正,使系统误差减少了近60%。另外,此系统误差处理方法不但可以使学生对单摆运动有更深刻的认识,还可以扩展学生视野,培养学生将所学知识运用到实际中去的理念。

关键词:单摆法 转动惯量 系统误差 重力加速度测量

1 引言

重力加速度测量是重要的物理实验,测量方法很多,有单摆法、自由落体法、打点计时器法等^[1,2]。单摆法操作简单,但是需要人工操作计时并且实验时间长等因素会导致系统误差。用自由落体法测量过程中,虽然计算过程简单,但是受压强的影响,小球初速度可能不为零,因此容易出现系统误差。用打点计时器法测量过程中,虽然导轨与滑块之间的摩擦力很小,但是无法忽略摩擦力。在这些测量方法中,利用单摆测量重力加速度是很重要的一种方法,因为它是一种间接测量法,比较方便。但由于单摆测量法忽略了摆线的质量和摆球的大小,系统误差比较大,需要对传统的单摆法进行改进。

2 理论分析

2.1 单摆法测量重力加速度的一般方法

不考虑刚体转动惯量时单摆周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_1}}$$

式中 $L = L_0 + r$, 其中 L_0 为摆线长, r 为摆球半径, g_1 为重力加速度^[3,4]。用这种方法测量重力加速度时,把球看成了质点,忽略了摆线的质量,因此存在系统误差。如果考虑摆球的大小和摆线的质量,把它们看成刚体,分别引入它们的转动惯量,就可以避免这个系统误差。

2.2 引入刚体转动惯量改进重力加速度测量

考虑上述因素后,找到了一种减小测量重力加速度系统误差的改进方法。此方法基于刚体模型,不改变实验装置,只利用刚体转动惯量改变实验数据分析过程。把摆球看成刚体进行计算。单摆模型如图1所示。

在单摆系统中,摆线长记为 l_0 , 摆线的质量为 m_1 , 摆线的质心为 C_1 , 球的半径为 r , 球的质量为 m_2 , 球的质心为 C_2 。总质心为 C , CC_1 的距离为 r_1 , CC_2 的距离为 r_2 , 等效摆长刚体对轴线的回转半径为 k_0 。

* 中央高校基本业务费专项资金,项目编号:SWU1609226;国家自然科学基金青年基金,项目编号:11404266

作者简介:张巧明(1986-),男,在读博士,实验师,主要从事有机电子学的科学研究和大学物理实验的教学工作。

通讯作者:李青燕(1992-),女,硕士,从事创客教育和未来教育的研究。

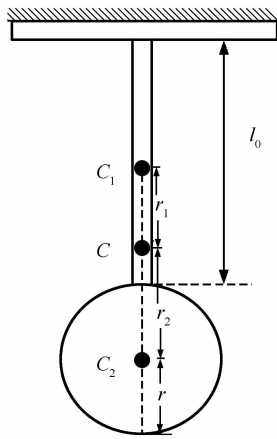


图1 单摆模型

整个系统相对于悬点的转动惯量为 I_0

$$I_0 = (m_1 + m_2) k_0^2 \quad (1)$$

定义

$$m = m_1 + m_2 \quad (2)$$

根据刚体等效摆长,把式(2)代入式(1)可得

$$k_0^2 = \frac{I_0}{m} \quad (3)$$

利用转动惯量的叠加性,总转动惯量也可表示为

$$I_0 = \frac{1}{3} m_1 l_0^2 + \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (l_0 + r)^2 \quad (4)$$

由图1,根据质心的定义,可知

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (5)$$

$$r_1 + r_2 = \frac{l_0}{2} + r \quad (6)$$

由图1易得质心离悬点的距离

$$l' = l_0 + r - r_2 \quad (7)$$

设摆线与竖直方向的夹角为 θ ,根据转动定律,合外力矩 $M = I_0 \alpha$,其中 M 为系统受的合外力矩, $M = -mgl' \sin \theta$; α 为刚体定轴转动的角加速度,且 $\alpha = \ddot{\theta}$. 可得

$$-mgl' \sin \theta = I_0 \alpha = mk_0^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{则} \quad \ddot{\theta} + \frac{gl'}{k_0^2} \sin \theta = 0$$

当 $\theta \rightarrow 0$ 时

$$\ddot{\theta} + \frac{gl'}{k_0^2} \theta = 0$$

此为典型的二阶齐次线性微分方程,其通解为余弦函数,函数的角频率 ω 满足

$$\omega^2 = \frac{gl'}{k_0^2}$$

则单摆的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{k_0^2}{gl'}} \quad (8)$$

把式(3)~(7)代入式(8),得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k_0^2}{gl'}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mg_2 l'}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{(m_1 + m_2) g_2 l'}}$$

因此,结合刚体转动惯量测得的重力加速度可表示为

$$g_2 = \frac{4\pi^2 I_0}{l' (m_1 + m_2) T^2} \quad (9)$$

要得到 g_2 ,需要测量的量为摆线长 l_0 ,摆线的质量 m_1 ,摆球的半径 r ,摆球的质量 m_2 ,单摆的周期 T .

2 实验测量

2.1 刚体转动惯量测量

用精度为 1 mm 的直尺测得 $l_0 = 0.3610$ m,用精度为 0.1 mg 的天平测得 $m_1 = 0.1117$ g,摆球的质量 $m_2 = 2.9136$ g,用精度为 0.1 mm 的游标卡尺测得摆球的半径 $r = 0.0075$ m,由式(7)得出 $l' = 0.3616$ m,由式(4)得转动惯量 $I_0 = 4.005 \times 10^{-4}$ kg·m²

2.2 单摆周期 T 的测量

在测量周期的过程中每测量 5 组数据,每组数据使单摆连续摆动 50 个周期,求一组单摆周期的平均值,再把 5 个平均值进行再求平均后得到周期值,周期测量数据如表 1 所示

表1 5次单摆周期测量平均值及总平均值

次数	1	2	3	4	5
\bar{T}/s	1.217 23	1.215 37	1.215 46	1.216 44	1.215 67
\bar{T}/s	1.216 0				

2.3 计算重力加速度

把上述数据代入到式(9)中,求得重力加速度为

$$g_2 = 9.7658 \text{ m/s}^2$$

由传统计算单摆周期推导出的重力加速度为

$$g_1 = \frac{L}{T^2} = \frac{4\pi^2 (l_0 + r)}{T^2} = 9.8286 \text{ m/s}^2$$

3 误差比较

精确的重力加速度理论公式^[5,6]为

$$g = \frac{g_0(1 - 0.00265 \cos \varphi)}{1 + \frac{2h}{R}}$$

其中 g_0 为地球标准重力加速度, $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$, φ 为测量点的地球纬度, h 为测量点的海拔高度, R 为地球的平均半径 ($R = 6370 \text{ km}$). 通过精度为 10 m 的手机 GPS 定位测量可得重庆的纬度和海拔分别为 $29^\circ 49' 31''$ 和 240 m , 代入理论公式, 得到准确度更高的标准重力加速度 $g = 9.7841 \text{ m/s}^2$. 让 g 与传统结果 g_1 和引入刚体转动惯量得到的结果 g_2 进行对比, 假设前者误差定义为 Δ_1 , 后者定义为 Δ_2 , 则

$$\Delta_1 = \frac{g - g_1}{g} = 0.455\%$$

$$\Delta_2 = \frac{g - g_2}{9.7841} = 0.187\%$$

可知, 引入刚体转动惯量后, 误差减少的百分比为

$$1 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 58.8\%$$

也就是精度提高了 $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 2.433$ 倍. 由此可见, 考虑了摆球的质量并且把摆球看成一个刚体后得到的误差减少了将近 60% ! 而精度提高了 2 倍多. 因此, 考

虑了摆球的质量并且把摆球看成一个刚体后, 可以得到更精确的单摆周期, 用这种方法能减小单摆周期的误差. 不仅如此, 还可以通过此方法, 把已学过的知识和新知识联系在一起, 加强学生们对刚体的认识. 还可以引领学生, 让他们明白在中学学到的东西, 离实用还有一定的距离, 还需要在大学里继续学习, 从而激发学生的兴趣.

参考文献

- 1 安学立. 用单摆重力加速度实验中单摆周期的测定. 物理通报, 2012(3): 74~75
- 2 贾伟尧, 邹愉, 陈林, 等. 智能手机“轨迹拍照”技术在随堂实验中的应用. 中学物理教学参考, 2014(12): 47~48
- 3 王梅, 宗晓玮. 用 DIS 测量重力加速度 g 值的四种方法及比较. 物理教学探讨, 2015(10): 54~56, 59
- 4 许刚. 到底什么因素引起重力加速度随纬度变化. 物理教学探讨, 2015(3): 41
- 5 陈泽, 支启军. 二级近似下精密测量重力加速度的理论研究. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(1): 148~152
- 6 张昆. 新的重力加速度理论公式. 地球物理学进展, 2011, 26(3): 824

Reducing System Error in Measuring the Gravity Acceleration by Introducing Inertia Moment

Zhang Qiaoming

(School of Physics Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715)

Li Qingyan

(Research Centre of Science Education, Southwest University, Chongqing 400715)

Lu Chenlei

(Chongqing Renhe Middle School, Chongqing 400052)

Jia Weiyao

(School of Physics Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715)

Abstract: The error is corrected by introducing moment of inertia in rigid body model theory into the simple pendulum measuring system, and the system error is reduced by 60% . In addition, the system error processing method not only enables students to have a more profound understanding of simple pendulum motion, but also expands the students' horizons and trains students to apply the knowledge they have learned to practice.

Key words: simple pendulum method; moment of inertia; system error; measuring acceleration of gravity