竞赛与物理专题研修

当均匀带电体是什么形状时在带电体上某点有最大场强

姜付锦　　吴　珊

（武汉市黄陂区第一中学　湖北 武汉　430300）

（收稿日期：2016－01－07）

摘　要：先用“对称性原理”对均匀带电体在表面某点产生最大电场强度时的形状进行了定性分析，然后用变分学的欧拉方程对物体的形状进行定量研究，最后对这个问题进行归纳和总结.

关键词：对称性原理　欧拉方程　泛函

一个均匀带电体的电荷量是一定的，若带电体是一均匀带电直线，则当直线弯成什么形状时在曲线上某一点产生的电场强度最大呢？若带电体是二维平面，则当带电平面是什么形状时在平面边缘某一点产生的电场强度最大呢？若带电体是三维立体结构，则当带电体表面是什么形状时在表面某一点产生的电场强度最大呢？它们会是圆形或球形吗？这其实是个泛函问题，本文先对物体形状作定性分析再对形状进行定量计算.

1　物体形状的定性讨论

如图 1 所示，以物体上某一点为原点 O，竖直向上的方向为极轴，建立球坐标系 (r,θ,φ)，其中 $r\in[0,\infty)$，$\theta\in[0,\pi]$，$\varphi\in[0,2\pi]$，则物体上的任意一点可由坐标 (r,θ,φ) 确定，物体表面可由函数 $r=R(\theta,\varphi)$ 描述. 要使原点处的电场强度最大，物体的形状应具有以下特性：

（2）改进的实验方法

针对室内风的影响，我们可以用有机玻璃做一个小的玻璃箱，箱子底部开口，将点燃的蜡烛罩在玻璃箱内. 玻璃箱的一侧和蜡烛火焰齐平处开一个圆孔，使喇叭正好能通过圆孔对准蜡烛火焰. 打开喇叭播放音乐，学生可以透过玻璃箱清晰地看到蜡烛火焰随音乐的高低起伏跳动.

或者可以采取另一个实验方案，可以让学生手里捧住一个吹足气的气球，然后教师在教室内用麦克风说话，学生就可以非常明显地感受到气球的振动，且振动随着教师说话响度的大小变化而变化，教师停止说话，则气球停止振动，进而直观地说明声波具有能量.

2　结论

以上几个实验都是中学物理“声现象”中经常出现的常规实验，看似简单其实并不简单. 如果没有经过周密的思考，只是照本宣科，有些实验是很难操作成功的. 一个好的教学实验可以使学生记忆终生，很大程度上影响学生学习物理的兴趣. 而想要做好这些实验，教师课前必须反复操作，精心设计，优化实验方案，多使用学生生活中的物品作为实验器材，使实验方案简单易懂，实验现象清晰明了. 深层次挖掘实验潜力，把一个实验做出新意，做出更高的水平. 其实，一名优秀物理教师的实验水平正是通过这样一点点思考和积累而来的.

参 考 文 献

1　李明权. 浅谈物理演示实验的教学. 物理教学探讨，2005(19)：26

2　陈晓莉. 普通物理实验教学现状调查及对策研究. 西南师范大学学报（自然科学版），2005(03)：585～588

3　应焕青. 浅谈初中物理实验教学. 中国现代教育装备，2010(04)：87

4　王较过，李贵安. 物理教学论（第 2 版）. 西安：陕西师范大学出版社，2009. 15～16

5　郝冠军. 利用初中物理实验激发学生学习兴趣. 新课程（中学），2014(06)：43

(1) 物体上任意一点 $\theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，若某点 $\theta > \frac{\pi}{2}$，则此点电场强度对合电场强度的贡献为负；若某点 $\theta = \frac{\pi}{2}$，则此点电场强度对合电场强度的贡献为零；

(2) 物体形状具有旋转对称性，绕极轴旋转任意角度对称，故物体表面函数简化为 $r = R(\theta)$. 由"对称性原理"[1]：原因中的对称性必反映在结果中，即结果中的对称性至少有原因中对称性那样多.

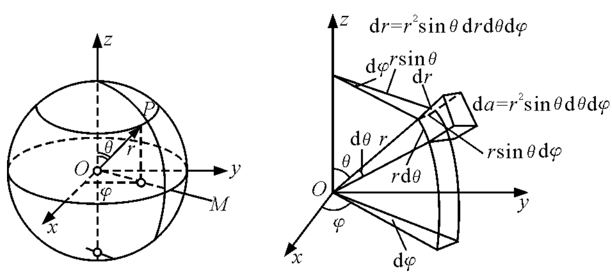

图 1　物体形状的定性讨论

2　物体形状求解的一般方法

满足固定边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 的光滑函数集合中，求一个函数 $y = y(x)$，满足条件（等周条件）

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\mathrm{d}x = C \ (C\text{ 为常数})$$

并使

$$I[y(\cdot)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x = \min$$

如果函数 $y = y(x)$ 给出泛函的极小值，且满足等周条件和边界条件，则存在常数因子 λ 使得函数 $y(x)$ 是泛函 $\int_{x_0}^{x_1}(F + \lambda G)\mathrm{d}x$ 的逗留函数，即 $y(x)$ 是欧拉方程[2] $\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) = 0$，$(H = F + \lambda G)$ 的解.

2.1　当带电体是三维物体时的形状[3]

设电荷连续分布的物体的电量为 Q，电荷的体密度为 ρ 且保持不变，在球坐标系中物体的体积可以表示为

$$V = \frac{Q}{\rho} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)} r^2\sin\theta\mathrm{d}r \ (\text{等周条件})$$

电场强度表达式为

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

由于物体具有旋转对称性，带电体在原点处产生的电场强度在垂直于极轴方向上的分量为零，物体在原点产生的电场强度为

$$E(r, \theta) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)} k\frac{\rho r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\mathrm{d}r$$

令 $t = \cos\theta$，$R_1(\cos\theta) = R(\theta)$，则

$$V = \frac{Q}{\rho} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)} r^2\sin\theta\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)} r^2\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 R_1^3(t)\mathrm{d}t$$

$$E(r, \theta) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)} k\frac{\rho r^2}{r^2}\mathrm{d}r =$$

$$2\pi k\rho\int_0^1 tR_1(t)\mathrm{d}t$$

由上述的方法知

$$H = tR_1(t) + \lambda R_1^3(t)$$

$$t + 3\lambda R_1^2(t) = 0$$

得

$$R_1(t) = \frac{1}{\sqrt{-3\lambda}}\sqrt{t}$$

$$R(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-3\lambda}}\sqrt{\cos\theta}$$

由等周条件得

$$R(\theta) = \sqrt[3]{\frac{15Q}{4\pi\rho}}\sqrt{\cos\theta}$$

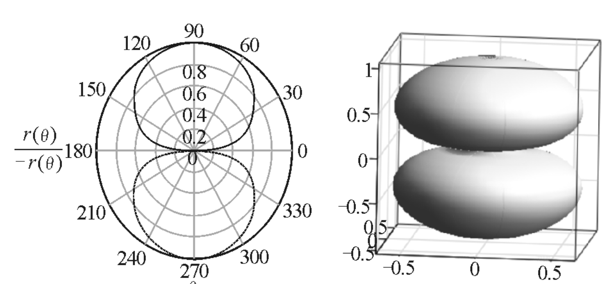

图 2　带电体的三维结构图

2.2　当带电物体是二维平面时的形状

设电荷连续分布的物体的电荷量为 Q，面密度为 σ 且保持不变，在极坐标系中物体的面积可以表示为

$$S=\frac{Q}{\sigma}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)}r\theta\,\mathrm{d}r\text{（等周条件）}$$

原点处的电场强度为

$$E(r,\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta)}\frac{k\sigma r\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}r$$

若令

$$t=\cos\theta\qquad R_1(\cos\theta)=R(\theta)$$

则等周条件为

$$S=\frac{Q}{\sigma}=\int_0^1\frac{R_1^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

电场强度为

$$E=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ln[R_1(t)]\mathrm{d}t$$

由上述的方法可知

$$H=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ln[R_1(t)]+\frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}R_1(t)$$

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}R_1(t)}+\frac{\lambda R_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0$$

得

$$R_1(t)=\sqrt{\frac{1}{-\lambda}}\sqrt{t}$$

即

$$R(\theta)=\sqrt{\frac{1}{-\lambda}}\sqrt{\cos\theta}$$

由等周条件得

$$R(\theta)=\sqrt{\frac{Q}{\sigma}}\sqrt{\cos\theta}$$

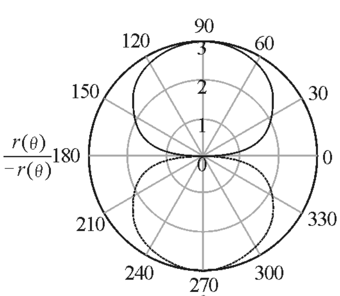

图 3　带电体的二维平面的形状

2.3　当带电体是一条粗细均匀曲线时的形状

设电荷连续分布的物体的电荷量为 Q，线密度为 λ 且保持不变，物体的长度可以表示为

$$L=\frac{Q}{\lambda}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta\text{（等周条件）}$$

$$E(r,\theta)=\int_0^{R(\theta)}\frac{k\lambda\sqrt{r^2+r'^2}\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta$$

由对称性原理可知，带电直线每一小段产生的场强在极轴方向上的分量相同，即 $\frac{\cos\theta}{r^2}$ 为一个定值，即

$$R(\theta)=C\sqrt{\cos(\theta)}$$

由等周条件得

$$R(\theta)=\frac{Q}{3.582\lambda}\sqrt{\cos(\theta)}$$

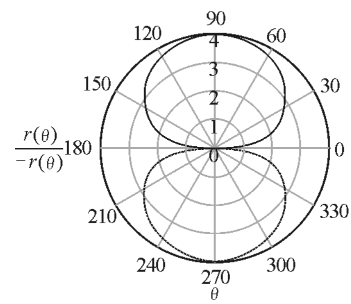

图 4　带电体是弯曲线时的形状

3　结语

通过对带电体的 3 种情况分析可以发现：

（1）物体的形状具有旋转对称性；

（2）物体上每个微元电荷在表面某一点产生的电场强度沿极轴方向上的分量相同；

（3）物体表面的形状可以表示为 $R(\theta)=k\sqrt{\cos(\theta)}$，式中 k 由等周条件和边界条件决定．在泛函问题中一般隐含一个不变量，这个不变量可能是转动的角速度[4～5]，也可能是沿某一个方向上的矢量（比如本文中的问题），在处理此类泛函问题时只要能找到这个不变量一切问题迎刃而解．

参考文献

1　赵凯华．定性与半定量物理学．北京：高等教育出版社，1991．33

2　欧斐君．变分法及期应用：物理、力学、工程中的经典建模．北京：高等教育出版社，2013．47 ～ 65

3　杨星宇．力学中一个趣味问题的讨论．物理通报，2015(8)：57 ～ 59

4　史友进，俞晓明．库仑摩擦最速降曲线问题的讨论．盐城工学院学报（自然科学版），2012(6)

5　史友进，俞晓明．库仑摩擦因数对串珠经典速降线与改进速降线下滑影响．牡丹江大学学报，2011(7)