一个电磁学问题的数学解法

何　肖

［中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院　北京　100083］

(收稿日期:2016－01－10)

摘　要:利用微积分计算通过非对称图形的电通量,计算结果和利用高斯定理的一样.这种做法可以作为计算非对称图形电场强度和电通量的参考.

关键词:微积分　非对称　电通量

高斯定理是电磁学中一个非常重要的定理,在求解电场强度和电通量的时候发挥着重要的作用.但是利用高斯定理存在很大的局限性,只有在具有对称性或者可以转为有对称性的问题中才能用到,对于非对称的问题,还是需要从定义出发,用微积分的方法来计算电场强度和电通量.下面以一道具体的题目来说明.

1　题目

如果有一点电荷 q 位于立方体一个顶点上,则通过不与该顶点相连的任一立方体侧面的电通量为多少?

这是一道关于求电通量的题目,大部分学生想到的一定是利用高斯公式.下面进行具体的分析.

2　高斯公式求解

在大学物理课本中只是强调了用高斯公式计算电通量,所以对于大多数学生看到这题的思路是用高斯公式计算.由于这道题目的图形没有明显的对称性,所以不能直接用高斯定理.根据图形的特点,需要补全图形.在有点电荷的顶点周围补充 7 个同样的立方体,这 8 个立方体组成一个大的立方体,根据高斯定理,穿过大立方体的电通量为$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$.又由于大立方体有 6 个面,每个面又包含小立方体的 4 个面,所以最后的答案就是$\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$.这道题的图形是可以补充为具有对称性的图形,进而才能利用高斯公式求解.在没有对称性的情况下,还可以利用微积分的办法来尝试.求通过曲面的电通量本质上就是一个二重积分的问题.

3　数学解法

建立如图 1 所示的坐标系.设小立方体的边长为 a,坐标原点建立在 A 点,电荷位于 D 点,求通过面 $ABEC$ 的电通量.

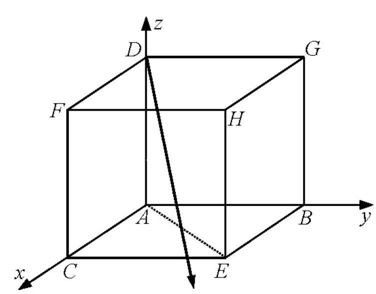

图 1　坐标系

面 $ABEC$ 上任意一点(x,y)处的电场强度大小为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+a^2)}$$

电场强度的方向与面 $ABCE$ 的夹角的余弦为$\dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$,所以通过单位面积的电通量为

$$\Delta\Phi=\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

对面 $ABCE$ 积分,得到总的电通量为

$$\Phi=\int_0^a\int_0^a\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这个二重积分在直角坐标中计算比较困难,可以想办法转化为在极坐标中的积分.直角坐标和极坐标的转换关系为

$$x=r\cos\theta\qquad y=r\sin\theta$$

将积分区域分为 2 个三角形，在不同三角形中积分范围如下

在三角形 ACE 内，

$$r: 0 \to \frac{a}{\cos\theta}$$

$$\theta: 0 \to \frac{\pi}{4}$$

在三角形 ABE 内，

$$r: 0 \to \frac{a}{\sin\theta}$$

$$\theta: \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{2}$$

电通量为

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a/\cos\theta} \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0\ (r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta +$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a/\sin\theta} \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0\ (r^2+a^2)^{3/2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta +$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta +$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta \qquad (1)$$

式(1) 的前一部分积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\theta-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{q}{48\pi\varepsilon_0}$$

式(1) 的第二部分积分为

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\theta+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{q}{48\pi\varepsilon_0}$$

总的电通量为

$$\Phi=\frac{q}{48\pi\varepsilon_0}+\frac{q}{48\pi\varepsilon_0}=\frac{q}{24\pi\varepsilon_0}$$

从上面的积分过程中可知，利用高斯公式和利用微积分计算的结果是一样的，这也验证了本题高斯定理的正确性. 其次，从上面的具体推导可以看出，通过两个三角形的电通量也是一样的.

4　结语

对于一道具体的电磁学题目，我们用高斯公式和微积分两种办法进行计算，得出相同的结果. 虽然高斯定理提供了一种求电通量的简单方法，但是这种方法的局限性很大，对于没有对称性的问题基本上无法处理. 利用微积分直接计算能处理一些规则图形的积分. 需要注意的是，微积分也不是万能的，存在一定的局限性，积分区域比较复杂就有可能积不出来. 因此对于学习的人来说，只有综合掌握这两种方法，才能高效简单地计算电磁学问题.

Mathematic Solution of A Electromagnetic Problem

He Xiao

[School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology(Beijing), Beijing　100083]

Abstract: using calculus to compute the electric flux of an asymmetric figure, the result is the same with Gauss theorem. this method can be used to calculus the electric field and electric flux of asymmetric figures.

Key words: calculus; asymmetric; electric flux