巧用圆解决力学问题*

倪守祥　徐逸凡　董芳芳
（盐城景山中学　江苏 盐城　224002）

（收稿日期：2016－01－12）

摘　要：通过例题介绍了圆在解决力的合成与分解、运动的合成与分解以及牛顿第二运动定律等问题时的重要应用.巧妙应用圆的知识，可使复杂问题变得简单且易于理解.

关键词：圆　力学　力　牛顿第二定律

物理与数学同为科学大家庭一员，互为表里，息息相关.杰出的数学能力往往能帮助我们更快速有效地解决物理难题.而数学中的圆，作为自然界中最美的图形，包含了直线、弧、圆心角、弦切角等丰富的几何内容.我们不妨思考，是否能将如此美丽的图形为我们所用，以解决较为复杂的物理问题呢？今天，我们将让物理邂逅数学，一起探讨圆在高一物理中的运用，主要分为以下 3 个部分.

1　圆在力的合成与分解中的应用

【例 1】将力 F 分解为 F_1 和 F_2 两个分力，若已知 F_1 和 F_2 的夹角 θ 为钝角，则当 F_1，F_2 大小相等时，它们的大小为______；当 F_1 取最大值时，F_2 的大小为______.

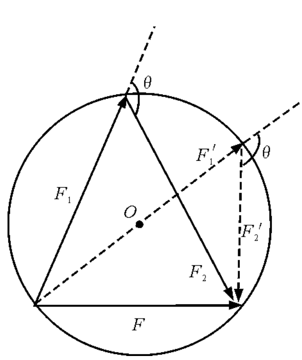

图 1

解析：一力确定，另两力夹角恒定，即 F 不变而分力 F_1 和 F_2 保持 θ 角不变，如图 1 所示，可利用“同弧所对的圆周角不变”在圆中构建变化的闭合矢量三角形，可轻松得出答案.

（1）当 F_1，F_2 大小相等时，有

$$F_1\cos\frac{\theta}{2}=\frac{F}{2}$$

即

$$F_1=\frac{F}{2}\sec\frac{\theta}{2}$$

（2）当 F_1 过圆心时，F_1 取最大值 F_1'，此时

$$F_2=F_2'=F\cot(\pi-\theta)$$

【例 2】在“互成角度的两个力合成”实验中，用 A，B 两只弹簧测力计把橡皮条上的结点拉到某一位置点 O，这时 AO 和 BO 间夹角 $\angle AOB<90°$，如图 2 所示.现保持弹簧测力计 A 的拉力大小不变，并逐渐减小 α 角，为了使结点仍被拉到 O 点，则应调节弹簧测力计 B 拉力的大小和方向，下列调整方法中，一定不可行的是

A. 增大弹簧测力计 B 的拉力和 β 角

B. 增大弹簧测力计 B 的拉力，β 角不变

C. 增大弹簧测力计 B 的拉力，减小 β 角

D. B 的拉力大小不变，增大 β 角

解析：以结点 O 为研究对象，对其受力分析，结点位置不变，说明皮条对结点的拉力不变，这是“一力确定，另一个力的大小确定”问题.利用“圆的半径相等”，以 O 点为圆心，F_A 的大小为半径作圆.

* 江苏省中小学教学研究第十一期立项课题，项目编号：2015JK11－L153

作者简介：倪守祥（1998－　），男，在读高中生.
指导教师：董芳芳（1987－　），女，硕士，中教一级，主要从事中学物理教学与研究.

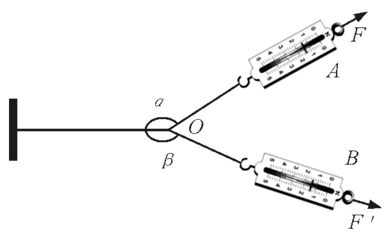

图 2

因为 $\angle AOB < 90°$，由图 3 可知，随着 α 角的减小，F_B 的大小不断增大，β 角先减小后增大. 综上，本题选 D.

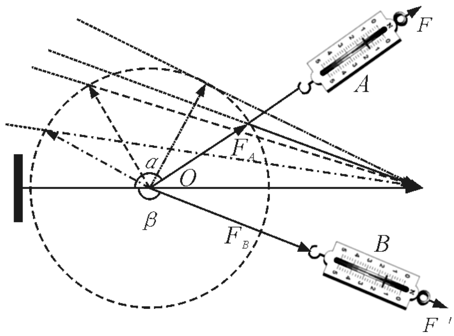

图 3

【例 3】不可伸长的轻绳 AO 和 BO 下端系一个质量为 m 的物体，细线长 $AO > BO$，A，B 两端点在同一水平线上，开始时两线刚好绷直，BO 垂直于 AB，如图 4 所示. 现保持 A，B 在同一水平线上，使 A 逐渐远离 B，在此过程中，细线上的拉力 F_A，F_B 的大小随 A，B 间距离的变化情况是

A. F_A 随距离增大而一直增大

B. F_A 随距离增大而一直减小

C. F_B 随距离增大而一直增大

D. F_B 随距离增大而一直减小

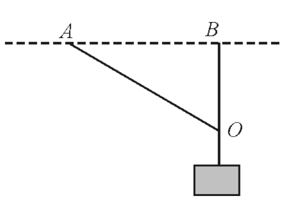

图 4

解析：如图 5 所示，以结点 O 为研究对象，对其受力分析，两绳合力与重力等值反向. 由题意可知，OA 与 OB 的长度恒定，利用圆解决问题十分简便. 以结点 O 为圆心，分别以 OB，OA 长为半径画圆，因 A，B 始终在同一水平线上，由此确定远离过程中 A，B 端点位置，即确定拉力方向.

最初，$F_A = 0$，$F_B = mg$，随着 A 点远离 B 点，由图示可知，F_A 一直增大，F_B 先减小后增大，所以此题选 A.

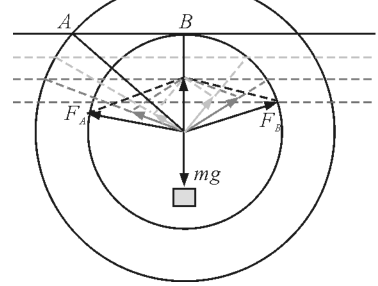

图 5

2　圆在运动的合成与分解中的应用

【例 4】已知小船在静水中的速度为 v_1，水流速度为 v_2，河宽为 d. 要使小船渡河时通过的路程最短，求下列两种情况下小船静水速度的方向与上游河岸的夹角分别为多大.

(1) $v_1 > v_2$；

(2) $v_1 < v_2$.

解析：(1) 当 $v_1 > v_2$ 时，小船静水速度方向应斜向上游，并使船垂直于河岸航行，则渡河路程最短. 设船静水速度的方向与上游河岸的夹角为 θ，则 $v_1 \cos\theta = v_2$，所以

$$\theta = \arccos \frac{v_2}{v_1}$$

(2) 当 $v_1 < v_2$ 时，无论小船的静水速度方向如何，都不能使船垂直于河岸航行. 但船的实际航行方向越接近于垂直河岸方向，渡河的路程就越短. 由于小船的静水速度大小一定，而方向可以变化，因此可以用一半径为 v_1 的圆周来表示静水船速可能的指向.

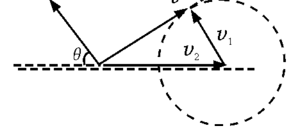

图 6

由图 6 可知，当船实际航行方向与圆相切时，小船与垂直河岸方向间的夹角最小，渡河的路程最短. 此时，$v_2 \cos\theta = v_1$，所以

$$\theta = \arccos \frac{v_1}{v_2}$$

3　圆在牛顿运动定律中的应用

【例 5】如图 7 所示，AD，BD，CD 是竖直面内 3 根固定的光滑细杆，A，B，C，D 位于同一圆周上，A 点为圆周的最高点，D 点为最低点. 每根杆上都套着一个小滑环(图中未画出)，3 个滑环分别从 A，B，C 处释放(初速度均为零)，用 t_1，t_2，t_3 依次表示滑环到达 D 所用的时间，则

A. $t_1 < t_2 < t_3$

B. $t_1 > t_2 > t_3$

C. $t_3 > t_1 > t_2$

D. $t_1 = t_2 = t_3$

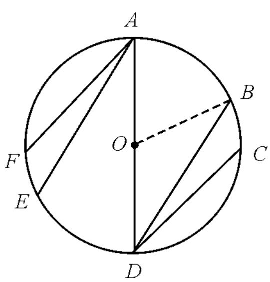

图 7

解析：设任意细杆与竖直方向的夹角为 θ，则小滑环的运动路程为 $s = 2R\cos\theta$，加速度 $a = g\cos\theta$，则运动时间

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

因此本题选 D.

结论：物体沿着位于同一竖直圆上的所有光滑细杆由静止下滑，到达圆周最低点的时间相等，像这样的竖直圆我们简称为“等时圆”.

推论：物体从最高点由静止开始沿不同的光滑细杆到圆周上各点(如图 7 中，E，F 点) 所用的时间相等.

【例 6】如图 8 所示，位于竖直平面内的固定光滑圆轨道与水平轨道面相切于 M 点，与竖直墙相切于 A 点，竖直墙上另一点 B 与 M 的连线和水平面的夹角为 60°，C 是圆轨道的圆心. 已知在同一时刻，a，b 两球分别由 A，B 两点从静止开始沿光滑倾斜直轨道运动到 M 点；c 球由 C 点自由下落到 M 点. 则

A. a 球最先到达 M 点

B. b 球最先到达 M 点

C. c 球最先到达 M 点

D. c，a，b 三球依次先后到达 M 点

解析：设圆轨道半径为 R，根据“等时圆” 理论

$$t_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

B 点在圆外

$$t_{\mathrm{b}} > \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

c 球做自由落体运动

$$t_{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

所以此题选 C 和 D.

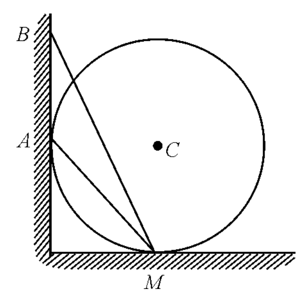

图 8

【例 7】(等时圆拓展) 如图 9，AB 是一倾角为 θ 的输送带，P 处为原料输入口，为避免粉尘飞扬，在 P 与 AB 输送带间建立一管道(假使光滑)，使原料从 P 处以最短的时间到达输送带上，则管道与竖直方向的夹角应为多大?

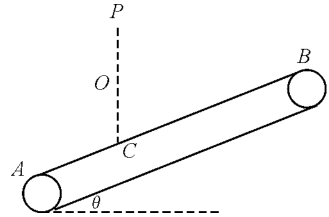

图 9

解析：借助“等时圆”，可以过 P 点的竖直线为半径作圆，要求该圆与输送带 AB 相切，如图 10 所示，C 为切点，O 为圆心. 显然，沿着 PC 弦建立管道，原料从 P 处到达 C 点处的时间与沿其他弦到达“等时圆” 的圆周上所用时间相等. 因而，要使原料从 P 处

到达输送带上所用时间最短，需沿着 PC 建立管道. 由几何关系可得，PC 与竖直方向间的夹角等于$\frac{\theta}{2}$.

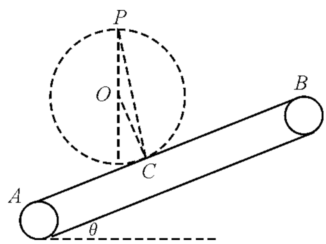

图 10

【**例 8**】(等时圆拓展) 在离坡底 10 m 的山坡上 O 点竖直地固定一长 10 m 的直杆 AO(即 $BO = AO = 10$ m). A 端与坡底 B 间连有一钢绳，一穿于钢绳上的小球从 A 点由静止开始沿钢绳无摩擦地滑下，取 $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$，如图 11 所示，则小球在钢绳上滑行的时间为

A. $\sqrt{2}$ s　　B. 2 s

C. 4 s　　D. $\sqrt{3}$ s

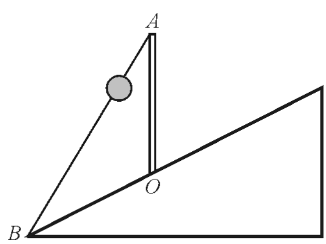

图 11

解析：如图 12 所示，以 O 点为圆心，以 $R = 10$ m 为半径作圆，则 A，B 为圆周上的点，AB 为弦，故从 A 到 B 的时间等于从 A 沿直径运动到直径另一端点的时间，据“等时圆”可得

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}} = 2\ \mathrm{s}$$

故 B 正确.

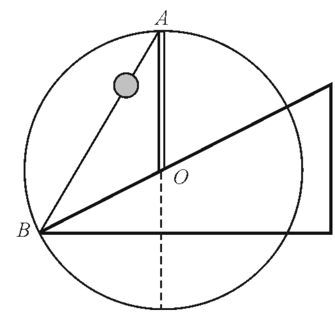

图 12

小结：“他山之石，可以攻玉”，适时地将各种学科有机结合，将所学的知识互相迁移，灵活运用，不仅可以拓宽我们的思维，提高我们的创新能力，还常常会取得意想不到的效果.

参 考 文 献

1　王中元. 单位圆在物理学中的巧妙应用. 中学物理，2011(2)：49 ～ 50

2　单文忠. 巧画圆解动态受力平衡问题. 物理教师，2012(2)：24 ～ 25

(上接第 56 页)

保险区域内的，才能安全返回. 请问，这个保险区域的边界曲线是什么？这几个问题的答案可以在参考文献[2] 中找到.

我们为什么给出问答式的题目而不是计算题的题目，是基于以下原因，一是计算题都是设定好的，所有的物理 / 数学量都给你，不多不少，学生只要按程序套公式就行了. 在这种类型题目训练中，学生丧失了最基本的问问题的欲望和动力，是很被动的机械式的解题. 二是本来知识的创生过程就来源于问问题，学知识也可以用这个思路. 三是，学问学问，不能只有学没有问. 对于学习物理来说，你有好奇心，主动去找问题，在求解问题的过程中，强大的征服欲望驱使你学习一切用来求解问题的知识、方法和手段. 这个过程虽然痛苦，折磨，但是不会让人麻木、僵硬、死板. 所以，本文题目中的“大秘密”，就是会问问题，能问问题，问出你和老师也不会解答的问题. 这个思路也有实际效果，在“应付”高考中，你不仅会解题，也能出题，用同高考出题专家一样的思路出题，比他们还高明地出题. 最后，问读者一个问题，本文中两类追及问题，我们问出 14 个问题来，你能问出多少个来？

参 考 文 献

1　杜振强，邱为钢. 追击问题的极限性质. 大学物理，2010，29(8)：57 ～ 58

2　邱为钢，蒋明明，杨虹. 追击问题临界范围的确定. 力学与实践，2007(5)：73 ～ 74