大学物理教学

带电球面和带电球体电场强度和电势分布求解探讨*

刘敏敏　组凤霞　吴　涛

（武汉工程大学理学院　湖北 武汉　430205）

（收稿日期：2016－01－17）

摘　要：在大学物理静电场的教学中，与球形有关的问题很典型，比如带电球面和带电球体周围空间的电场强度和电势分布问题，不同电荷密度分布带电球体周围空间的电场强度和电势分布的求解问题，本文对这些球形带电体系进行分析探讨，分别根据定义式求解和高斯定理求解，并找出了其规律式和特点.

关键词：带电球面　带电球体　电场强度　电势

在大学物理静电场的教学中，电场强度和电势是反映静电场本身性质的重要物理量[1~7]，目前已经有了相当多的讨论[3~7]. 在电场强度和电势的探讨和求解中，与球形有关的问题很多，比如带电球面周围空间的电场强度和电势分布问题，不同电荷密度分布的带电球体周围空间的电场强度和电势分布的求解问题，然而在实际的教学中，我们发现学生在理解和计算的时候会在物理思想和数学计算上存在疑惑，本文将对这些球形带电体系进行分析探讨，并找出其规律和特点.

1　真空中均匀带电球面的电场和电势分布

设均匀带电球面的总体带电量为 q，其球半径为 R，电荷面密度为 σ，求解此球面内和球面外两个部分的电场强度分布，可以采用两种不同的方法：(1) 点电荷电场强度叠加法；(2) 高斯定理. 电势则可以在此基础上进行求解. 下面分别进行探讨.

1.1　点电荷电场强度叠加法

对于均匀带电球面，由于场强具有球对称性，只需要求解其径向的电场强度即可. 首先将其看成是沿某一直径方向上，无数个半径连续变化的圆环的叠加，这样其电场强度将是这许多圆环电场的叠加，利用半径为 a 的圆环的中轴线上 P 点的电场强度的结论

$$E = E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

即可求解.

如图 1 所示，环带半径 $a = R\sin\theta$，环带宽为 $R\mathrm{d}\theta$，环带的面积为 $2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$，环带带电量

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} q\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

则环带在 P 点处产生的场强为

$$\mathrm{d}E = \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q\sin\theta(r - R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{8\pi\varepsilon_0 [(r - R\cos\theta)^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{q\sin\theta(r - R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{8\pi\varepsilon_0 (r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

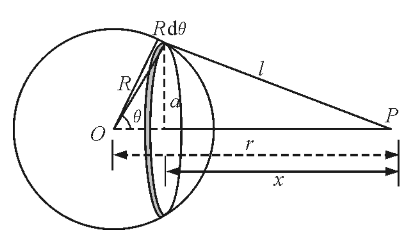

图 1　均匀带电球面示意图

换元令 $l = (r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，则

* 武汉工程大学科学研究基金项目，项目编号：K201422；武汉工程大学教学研究基金项目“科研促进教学，深化大学物理课程体系改革”，项目编号：X2014037

作者简介：刘敏敏（1981－　），女，博士，讲师，主要从事物理教学以及光学和原子与分子物理方向的研究.

$$\mathrm{d}l=\frac{rR\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\tag{2}$$

$$\mathrm{d}E=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{q\sin\theta(r-R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{8\pi\varepsilon_0[(r-R\cos\theta)^2+a^2]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{q\sin\theta(r-R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{8\pi\varepsilon_0(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r-\frac{R^2+r^2-l^2}{2r}\right)\mathrm{d}l}{rRl^2}\tag{3}$$

球外一点

$$E=\int_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}E=$$

$$\int_{r-R}^{r+R}\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r-\frac{R^2+r^2-l^2}{2r}\right)}{rRl^2}\mathrm{d}l=$$

$$\frac{q}{16\pi\varepsilon_0Rr^2}\int_{r-R}^{r+R}\frac{(r^2-R^2+l^2)}{l^2}\mathrm{d}l=$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\tag{4}$$

球内一点

$$E=\int_{R-r}^{r+R}\mathrm{d}E=$$

$$\int_{R-r}^{r+R}\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r-\frac{R^2+r^2-l^2}{2r}\right)}{rRl^2}\mathrm{d}l=$$

$$\frac{q}{16\pi\varepsilon_0Rr^2}\int_{R-r}^{r+R}\frac{(r^2-R^2+l^2)}{l^2}\mathrm{d}l=0\tag{5}$$

1.2 高斯定理求解

取同心球面为高斯面,如图 2 所示.

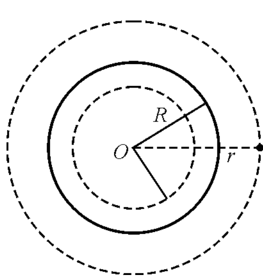

图 2 均匀带电球面高斯面示意图

由对称性可知,高斯面上的电场强度大小处处相等,方向为半径方向,因此有

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\cdot4\pi r^2=\begin{cases}\dfrac{q}{\varepsilon_0} & 球外\\ 0 & 球内\end{cases}\tag{6}$$

则电场强度

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2} & 球外\\ 0 & 球内\end{cases}\tag{7}$$

可以看到对于具有高度对称性的均匀带电球面,利用高斯定理求解其内外空间的电场强度是非常方便的,在数学计算上也相对简单得多.然而要从本质上直观逻辑性地去理解电场强度的性质,则电场叠加原理是容易被理解的,只是数学计算比较复杂,在大学物理的教学中需要学生的数学基础相对较好.

1.3 电势的求解

静电场中 P 点的电势等于电场强度从该点开始沿着任意路径到零势点的线积分,这里取无穷远处电势为零,因此球外距球心为 r 处一点的电势

$$U_P=\int_P^{"0"}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_P^{"0"}E\mathrm{d}r=$$

$$\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r}\tag{8}$$

距球心为 r 处球内一点

$$U_P=\int_P^{"0"}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_P^{"0"}E\mathrm{d}r=$$

$$\int_P^R0\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}\tag{9}$$

整个球面以及球面内等势.

2 真空中带电球体的电场强度和电势分布

带电球体类型的问题中最典型的就是:真空中有一半径为 R 的带电球体,其电荷体密度分布为 $\rho=Ar^n$,A 为一常量,其电荷密度分布是半径的幂函数.试求球体内外的场强分布.我们在实际的教学中通常都是将幂 n 具体化,例如 $n=1,0,-1,2$ 等等,对其逐一进行计算,其实这类问题可以一次求解出规律式,然后再针对具体的情形讨论.简述求解过程如下.

2.1 高斯定理求电场强度

由于具有球对称性,方便利用高斯定理求解,设整体带电量为 q,选择过 P 点同心的球面为高斯面,如图 3 所示,若高斯面在球内则用 q_{in} 表示所包围的电量,由高斯定理可得

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \text{球外} \\ \dfrac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} & \text{球内} \end{cases} \tag{10}$$

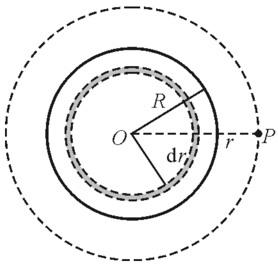

图 3　具有球对称的带电球体示意图

球外的电场强度求解很简单，比较难的是求解球内的电场强度. 求解球内电场强度关键在于求解高斯面包围的电量 q_{in}. 由于电荷密度是径向的幂函数，因此选取薄球壳为积分元，进行积分求电量

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = Ar^n 4\pi r^2 \mathrm{d}r \tag{11}$$

$$q_{\text{in}} = \int_0^r \mathrm{d}q = \int_0^r \rho \mathrm{d}V = \int_0^r Ar'^n 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' \tag{12}$$

当 $n > -3$ 时，有

$$q_{\text{in}} = \int_0^r \mathrm{d}q = \int_0^r \rho \mathrm{d}V = \int_0^r Ar'^n 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 4\pi A \frac{r^{n+3}}{n+3}$$

当 $n \leqslant -3$，则

$$q_{\text{in}} = \int_0^r \mathrm{d}q = \int_0^r \rho \mathrm{d}V = \int_0^r Ar'^n 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$$

积分无解，即：

(1)$n = -3$ 时，由 $n + 3 = 0$ 可知分母为零，积分无解；

(2) 当 $n < -3$，此时 r^{n+3} 在分母上，积分从 $r = 0$ 开始，因此分母出现为零的情形，所以积分无解，从物理本质上来说此时对应着电荷几乎全部集中在球心处的情形，球心处的密度无穷大.

因此，对于可以求解的 $n > -3$ 的情形，体系的电场强度为：

球外距球心为 r 处电场强度大小

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{4\pi A}{n+3} R^{n+3} = \frac{AR^{n+3}}{\varepsilon_0 (n+3) r^2} \tag{13}$$

球内距球心为 r 处电场强度大小

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{4\pi A}{n+3} r^{n+3} = \frac{Ar^{n+1}}{\varepsilon_0 (n+3)} \tag{14}$$

2.2　电势的求解

根据电势的定义，带电球体球外 P 点

$$U_P = \int_P^{"0"} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_P^{"0"} E \mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{AR^{n+3}}{(n+3)\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{AR^{n+3}}{(n+3)\varepsilon_0 r} \tag{15}$$

球内一点

$$U_P = \int_P^{"0"} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_P^{"0"} E \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{Ar^{n+1}}{(n+3)\varepsilon_0} \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{AR^{n+3}}{(n+3)\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{AR^{n+2}}{(n+3)\varepsilon_0} + \frac{AR^{n+2}}{(n+3)(n+2)\varepsilon_0} - \frac{Ar^{n+2}}{(n+3)(n+2)\varepsilon_0} \tag{16}$$

对于不同的 n 的取值，直接代入规律式即可得到电场强度和电势的分布情形，而且，n 还可以不仅仅只取整数值，对于 n 取分数值，该规律式同样成立.

3　小结

本文讨论了真空中均匀带电球面周围空间的电场强度和电势分布问题以及随径向不同密度分布的带电球体周围空间的电场强度和电势分布的求解问题，对这些球形带电体系进行分析探讨，并归纳总结了其场强和电势的计算规律表达式及特点.

参 考 文 献

1　张三慧，等. 大学物理学(第 3 版). 北京：清华大学出版社，2009

2　胡亚联，吴峰. 大学物理学. 北京：科学出版社，2010

3　周瑞雪. 关于圆盘状物体的几个物理量的计算. 物理与工程，2014，24(5)：51 ～ 58

4　景义林. 无限大圆平面稳恒发散电流产生的磁场. 大学物理，2015，34(4)：13 ～ 15

5　郭浩，陈钢. 线电荷与带有半椭圆柱凸起的接地平板系统的电势. 大学物理，2014，33(11)：9 ～ 11

6　林焰清，陈钢. 线电荷与接地椭圆柱形导体系统的电势. 大学物理，2009，28(8)：25 ～ 27

7　阳喜元，蔡新华，吴丹. 微元法研究均匀带电体的电场分布. 广西物理，2016，29(3)，34 ～ 37

(下转第 13 页)

若 $\theta=\pi$,则

$$\omega'=\lambda\omega(1+u)=\omega\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}>\omega$$

蓝移.

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$,则

$$\omega'=\gamma\omega$$

即横向多普勒效应.

3　两种方法的比较

通过非几何语言与几何语言狭义相对论对多普勒效应的推导,可以看出:非几何语言简单、明了,仅通过四维矢量的洛伦兹变换关系就可推出多普勒效应[3,4].但不足之处是人为地引入了相位不变性,即设定相位是洛伦兹标量.在几何语言的狭义相对论中,从微分几何的二形式场出发,引入 4 势 A_a,代入麦克斯韦方程组,得出 4 势 A_a 的波动方程,解无源电磁波的波动方程,自然地引入 4 波矢 K^a,并且 K^a 的物理意义非常明确,它是类光矢量,而且是由 $\theta=c$ 给出类光超曲面的法矢量,K^a 是躺在类光超曲面上的类光测地线.通过 K^a 在惯性系$\{t,x_i\}$的 $3+1$ 分解,很自然得出多普勒效应.但几何语言所用的数学知识深奥,理论性强,比较难懂,对狭义相对论的理解可以上一个很高的台阶,而且为后续广义相对论的学习打下了扎实的基础.但对没有接触微分几何的学者来说,普通电动力学教材狭义相对论的讲法不失为一种通俗、易懂的方法.

参考文献

1　郭硕鸿.电动力学(第 3 版).北京:高等教育出版社,2008.06

2　梁灿彬.微分几何入门与广义相对论(上册).北京:北京师范大学出版社,2002.06

3　章敏.大学物理中多普勒效应的教学体会.数理与化学研究,2013(06)

4　姚晓玲,宋世军.多普勒效应及其应用探讨.漯河职业技术学院学报,2014,13(5):87～88

The Doppler Effect of Light Wave

Zhang Zizhen

(College of Physics and Electric Science, Datong University, Datong, Shanxi　037009)

Abstract:The doppler effect of light belong to the category of special relativity. We derived the formula for light wave doppler effect using geometry and non-geometry languages of special relativity , and made a comparative analysis of two kinds of methods.

Key words: special relativity; geometry language ; doppler effect

(上接第 10 页)

Solution Discusses on Electric Field Intensity and Potential Distribution of a Charged Spherical Surface and a Charged Sphere

Liu Minmin　Zu Fengxia　Wu Tao

(School of science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan,Hubei　430205)

Abstract: In the teaching of electrostatic field in university physics, problems related to the spherical is tipical, such as eletric field intensity and electric potential distribution problem for a charged spherical surface or a charged sphere with different charge density. This paper discusses and analyses these problems, and find out the general law and characters with using the definition and the Gauss theorem.

Key words: a charged spherical surface; a charged sphere; eletric field intensity; electric potential