

电容器与电源连接电路中的能量转化关系

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2016-04-07)

摘要:推导了电容器储存的电场能的公式以及电能密度公式,探究了电容器与电源连接电路中的电场能在外力做功的过程中的转化规律,利用电容器的静电能公式和虚功法解答有关电容器极板间距大小或电介质多少发生变化的竞赛题.

关键词:电容器 电场能 能量密度

真空平行板电容器储存的静电能为

$$W_c = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot U^2 =$$

$$\frac{Sd}{8\pi k} \left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{V}{8\pi k} E^2$$

其中 $V = Sd$ 为平行板电容器两极板间的体积.

由此可知真空中电场的能量密度为

$$\omega = \frac{E^2}{8k\pi} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

这表明空间电场具有能量,电能密度正比于场强的平方.

所以空间匀强电场的静电能等于能量密度与所占体积的乘积,即 $W_c = \omega V$.

【例1】平行板电容器的正对面积为 S ,初始时两板间距为 d ,两板与电压 U 相连接.如果要把电容器的两个极板拉开,间距变为 $2d$,那么需要做多少功?在这个过程中,电容器的能量变化了多少?

解析:平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

开始时储存的电场能为

$$W_c = \frac{1}{2}CU^2$$

后来储存的电场能为

$$W_c = \frac{1}{2}C'U^2 = \frac{1}{4}CU^2$$

可知电场能的变化量为

$$\Delta W_c = \frac{1}{4}CU^2 = \frac{\epsilon_0 SU^2}{4d}$$

若极板间距为 x ,则一个极板受到另一个极板的静电引力为

$$F = \frac{E}{2}Q = \frac{\epsilon_0 SU^2}{2x^2}$$

克服电场力做的功为

$$W = \int_d^{2d} F(x)dx = \frac{\epsilon_0 SU^2}{2} \int_d^{2d} \frac{dx}{x^2} = \frac{\epsilon_0 SU^2}{4d}$$

由此可见,拉开极板做功的过程使电容器的能量减小为原来的一半.而且做多少功,电容器储存的电场能就减少多少.电荷离开两极板时,给电池充电,使电池的能量增加了,同时在电路中产生了焦耳热.

对于连接电源的电容器,两个极板上的异号电荷相互吸引,若把两个极板拉开则静电引力做负功,好像电势能增加了,但实际上,由于电容器放电,而且场强变小了,使得电势能减少了.因为极板间距增大,则电容减小了,所以电场能 $W_c = \frac{1}{2}CU^2$ 减小了.或者说,对于一个与电源连接的电容器,若极板间距增大,则电容器放电,电场能转化为电池中的能量或耗散在电路中.如果电容器不与电源相连,若把两个极板拉开则静电引力做负功,因此电势能一定增加,关键是极板上的电荷量与极板之间的场强都不变;或者说,由于极板间距增大,则电容减小了,所以电场能 $W_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 增加了.

对于一个与电源连接的电容器,当外力使极板间距增大时,电场能的变化等于外力做的功,好像满足功能关系,与电路中的电源无关,其实不然.因为在外力做功的过程中,电容器通过电源把能量释放出去,电场能转化为电源的能量或消耗在电源的内阻上,电源参与了能量转化,因此外力做功或者电场

力做功与电容器电场能的变化在因果上不满足功能关系,只是在数量上相等而已.但对于整个系统中的能量变化满足能量守恒定律.

【例2】平行板电容器两极板A与B的间距为 d ,竖直地插在密度为 ρ ,相对介电常数为 ϵ_r 的液态电介质中,当两极板连接一定的电压 U 时,求电容器两极板间液面上升的高度 h (不计液体表面张力).

解析:虚设电介质迁移,电源能量转化为重力势能和电场能.

设极板面积为 S_0 ,在电容器中电介质与极板接触面积为 S ,则空气与极板接触面积为 $S_0 - S$,两个电容器并联,由电容的决定式 $C = \frac{\epsilon_r S}{4\pi k d}$ 可知,此时电容器的电容为

$$C = \frac{S_0 - S}{4\pi k d} + \frac{\epsilon_r S}{4\pi k d} = \frac{S_0}{4\pi k d} + \frac{(\epsilon_r - 1)S}{4\pi k d}$$

设电容器极板的水平方向宽度为 a ,平衡时两极板间液面上升的高度为 h ,则超出液面部分的液体介质受到竖直向上作用力的大小为

$$F = mg = \rho a d h g$$

假设液体在力 F 作用下又向上发生一小段位移 Δh ,则力 F 做的功等于重力势能的增加量,即

$$\Delta W_1 = F \Delta h = \rho a d h g \Delta h$$

电容的增量为

$$\Delta C = \frac{(\epsilon_r - 1) \Delta S}{4\pi k d} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{a \cdot \Delta h}{d}$$

由电容的定义式可得电容器增加的电荷量为

$$\Delta Q = U \cdot \Delta C = U (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{a \cdot \Delta h}{d}$$

因此增加的电场能为

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta C \cdot U^2 = U^2 (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{a \cdot \Delta h}{2d}$$

电源做的功为

$$\Delta W_2 = U \cdot \Delta Q = U^2 (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{a \cdot \Delta h}{d}$$

由能量守恒定律得

$$\Delta W_2 = \Delta E + \Delta W_1$$

解得

$$h = U^2 \frac{\epsilon_r - 1}{8\pi k d^2 \rho g} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 U^2}{2d^2 \rho g}$$

【例3】电容式电压计是由空气平行板电容器与弹簧构成.其中一个极板固定不动,另一个极板可沿垂直于板面方向平动,劲度系数为 κ' 的弹簧固定在

可动极板上.如图1所示.极板的正对面积为 S ,当电压为零时两极板间距为 d .此仪器能够测量的最大电压是多少?

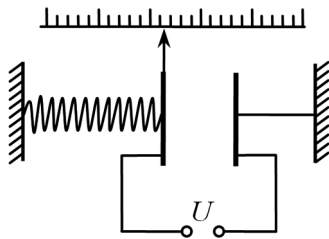


图1

解法1:设电压为零时,弹簧形变量为零,当加上电压 U 时,引力使极板间距减小,则电容增大,电荷量增大,引力增大,当最终平衡时,极板间引力为 F ,与弹簧的弹力大小相等,方向相反,设此时弹簧伸长量为 x ,极板间电压仍为 U ,间距为 $l = d - x$.可用虚功法推导静电力 F 与极板间距 l 的关系.

假设在静电力作用下,极板发生微小位移 Δx ,则克服弹簧的弹力所做的功为

$$W = F \cdot \Delta x$$

开始时电容器储存的静电能为

$$W_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{l} \cdot U^2$$

此时电容器增加的电场能为

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= W_{C2} - W_{C1} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{l - \Delta x} \cdot U^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{l} \cdot U^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S \cdot \Delta x}{(l - \Delta x) l} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \Delta C U^2 \end{aligned}$$

即

$$\Delta E_1 \approx \frac{\epsilon_0 S \cdot \Delta x}{2l^2} \cdot U^2$$

移动的电荷量为

$$q = \Delta C \cdot U$$

则电源放出的能量为

$$\Delta E_2 = \Delta C \cdot U^2$$

由能量守恒定律有

$$\Delta E_2 = \Delta E_1 + W$$

可得

$$W = \frac{1}{2} \Delta C \cdot U^2$$

由此得

$$F \approx \frac{\epsilon_0 S}{2l^2} \cdot U^2$$

式中 $l = d - x$.

而此时弹簧的弹力为 $F' = \kappa'x$, 与极板间的静电引力平衡, 即

$$\kappa'x \approx \frac{\epsilon_0 S}{2(d-x)^2} \cdot U_x^2$$

则

$$U_x^2 = \frac{2\kappa'x(d-x)^2}{\epsilon_0 S} = \frac{2\kappa'x(d-x)(d-x)}{\epsilon_0 S}$$

由于 $2x + (d-x) + (d-x) = 2d$ 为常数, 利用均值不等式可知, 仅当 $2x = (d-x) = (d-x)$ 时, 即

$x = \frac{d}{3}$ 时, 电压最大. 所以电压最大值为

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{8\kappa'd^3}{27\epsilon_0 S}} = \frac{2d}{3} \sqrt{\frac{2\kappa'd}{3\epsilon_0 S}}$$

实际上, 总能量都是由电源提供的, 其中一半能量转化为电容器的静电能, 另一半能量使极板发生移动, 转化为弹簧的弹性势能.

解法 2: 假设在静电力作用下, 极板发生微小位移 Δx , 则克服弹簧的弹力所做的功即静电引力做的功为 $W = F \cdot \Delta x$.

由于电容器空间减少的体积为 $V = S \cdot \Delta x$, 则由

能量密度公式 $\omega = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 可知减少的静电能为

$$\Delta E = \omega V \approx \epsilon_0 \frac{S \cdot \Delta x}{2} \left(\frac{U}{l}\right)^2$$

二者在数量上相等, 即 $W = \Delta E$, 可得

$$F \approx \frac{\epsilon_0 S}{2l^2} \cdot U^2$$

在上述两种解法中, 若利用电容器的静电能公式计算, 则静电能增加量为

$$\Delta E_1 \approx \frac{\epsilon_0 S \cdot \Delta x}{2l^2} \cdot U^2$$

若利用能量密度公式计算, 则静电能减少量为

$$\Delta E = \omega V \approx \frac{S \cdot \Delta x}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U}{l}\right)^2$$

那么二者是否发生矛盾呢? 其实不然, 因为前者静电能的增加量是指储存在电容器中的静电能, 是电源给电容器充电的结果; 而后者静电能的减少量是指电磁系统损失的静电能, 不是储存在电容器中, 而是从电磁系统转移到弹簧中去了, 是极板间的静电引力做功的结果. 静电引力做多少功, 电场能就减少多少, 弹簧的弹性势能就增加多少, 或者说电源放出 2 倍的能量转化为电容器的静电能, 其中一半储存在电容器中, 另一半用来克服弹簧弹力做功, 转化为弹性势能.

参考文献

- 1 物理学难题选登 V. 物理通报, 2007(11):33
- 2 物理学难题选登 V 解答. 物理通报, 2007(12):38
- 3 杨国平. 虚功原理. 数理天地, 2006(3)
- 4 杨国平. 物理解题中的极值方法. 物理通报, 2012(4):56

(上接第 84 页)

用恒力 F_2 压 A 时, 恒力 F_2 做的功为

$$W = F_2 x$$

所以

$$F_1 = 2F_2$$

从动力学角度定性半定量分析, 缓慢压缩 A 时, 压缩过程是准静态过程, 可认为物块 A 处于受力平衡状态, 撤去 F 前, 有

$$F_1 + m_A g = F_k \quad (11)$$

式中 F_k 是撤去 F 前弹簧的弹力.

由前面的分析知, 两种情形撤去压力前, 弹簧的形变量相同, 弹簧的弹力相同. 用恒力 F_2 压缩 A 时, 物块 A 做简谐振动, 由简谐振动的对称性知, 刚作用 F_2 时与撤去 F_2 前, 分别对应物块 A 振动的上、下最大位移位置, 物块 A 的加速度大小相同, 有

$$F_2 = m_A a \quad (12)$$

$$F_k - m_A g - F_2 = m_A a \quad (13)$$

联立式(11) ~ (13), 得

$$F_1 = 2F_2$$

物理习题既是加深和扩展物理知识, 促进知识向能力转化的重要载体, 又是物理与社会链接的文化桥梁. 物理习题教学是物理教学的有机组成部分, 在培养学生分析问题和解决问题能力方面具有不可替代的作用. 编制习题是教师的基本功之一, 改造旧题是中学教师编题的常用方法. 抓住典型问题, 一题多变, 一题多解, 题后思考, 不仅可以提升学生的物理思想、迁移物理方法, 使学生加深对物理概念、规律的理解, 开阔学生的思路, 提高分析问题和解决问题的能力, 培养和发挥学生的创造性, 有利于在原有基础上建立更高层次的认知结构, 而且可以提升教师的教学研究能力, 实现教学相长.

参考文献

- 1 王建忠. 物理教学中要注重定性分析能力的培养. 物理教学, 2007(9)