# 浅谈动量守恒定律的导出方式

张　悦　冯　杰

（上海师范大学数理学院　上海　200234）

（收稿日期：2016－04－07）

**摘　要**：动量守恒定律是自然界中最普遍的定律并有着广泛的应用领域，不仅适用于宏观物体的运动，同样适用于微观领域．不过，在目前的大多数教材中，都是由牛顿第二定律和牛顿第三定律导出动量守恒定律的，那么就会让人们忽略动量守恒定律的其他导出方式．试图阐述动量守恒的几种不同导出方式，强化对动量守恒定律的认识和应用．

**关键词**：动量守恒定律　动量　空间均匀性

## 1　引言

在经典力学中，作为牛顿定律的推论，结合运动学规律可以推出动量定理、角动量定理及能量转换和守恒定律[1]．当合外力等于零、合外力矩等于零或外力做的功与系统内非保守力做的功总和等于零的情况下，可以得到相对应的 3 条守恒定律，即动量守恒定律、角动量守恒定律以及能量守恒定律．这 3 条守恒定律其适用范围与牛顿定律相同．值得注意的是，在一些情况下，3 条守恒定律的适用范围远远超过牛顿定律，是比牛顿定律更基础的物理规律，是时空性质的反映，解决问题更方便，其物理意义也更加深刻．本文主要阐述动量守恒定律的导出方式，强化对动量守恒定律的认识和应用．

动量守恒定律：在任何情况下，物体组（运动系统）不受外力作用或作用在物体组（运动系统）的合外力等于零时，物体组（运动系统）的总动量保持不变，这一结论叫做动量守恒定律．数学表达式为：

在 $\sum F = 0$ 的条件下

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + m_n \boldsymbol{v}_n = \text{恒量}$$

## 2　动量守恒定律的几种导出方式

### 2.1　哲学思想

历史上，人们对动量及动量守恒定律最初的认识主要是从对碰撞问题的研究开始的．最早发表碰撞问题研究成果的是布拉格大学校长、物理学教授马尔西．他使用完全相同的一串大理石做碰撞实验，并将研究过程及结果写在 1639 年发表的《运动的比例》中：“一个物体与另一个相同处于静止状态的物体做弹性碰撞，就会失去自己的运动，把速度等量地交给另一物体．”[2] 显然，马尔西已经认识到动量守恒的思想，但他并未作进一步理论分析．

可以说，动量及其守恒的概念最初是由法国科学家笛卡尔以思辨、演绎的形式提出来的，这就是动量守恒定律建立的最初形式．笛卡尔的基本理念是：上帝创造了广延，并把运动放进了宇宙，此后就任其自然进行．所有宇宙中的运动总量必然是个常数．笛卡尔在 1644 年发表的《哲学原理》中说道：“物质有一定量的运动，这个量从来不增加也从来不减的，虽然在物质的某些部分有所增减．就是这个缘故，当一部分物质以两倍于另一部分的速度运动，而另一部分物质却大于这一部分物质两倍时，我们应该认为这两部分的物质具有等量的运动．并且，我们应该认为每当一个部分的物质的运动减少时，另一部分就相应地增加．” 显然，此处笛卡尔已经将物质的量和运动的度量两者结合在一起，这两者的结合就是后来的动量（$mv$）的概念．而宇宙中“物质与运动的总量必然是个常数”，则意味着动量守恒的基本思想．

---

**作者简介**：张悦（1992－　），女，在读研究生，学科教学（物理）专业．

**指导教师**：冯杰（1961－　），男，博士，教授，物理课程论学科带头人，长期从事物理学研究和教学，主研方向为理论物理、非线性光学、物理课程与教学论．

随后，荷兰物理学家惠更斯对碰撞问题作了比较细致的研究，在《论碰撞作用下物体的运动》一文中得出了 5 条重要结论，其中两条说到："两个物体所具有的运动量在碰撞中可以增多或减少，但是它的量值在同一方向上保持不变"；"两个、三个或任意多个物体的共同重心，在碰撞前后总是朝着一个方向做匀速直线运动". 这些显然是动量守恒定律非常完善的表述.

从以上的讨论我们可以看出，虽然，后来人们运用数学逻辑演绎等方法通过定量的方式导出了动量守恒定律，但是最初的哲学思想仍然是该理论的坚实基础. 可以说，动量守恒的观点最初是从哲学理念演绎出来的[3].

### 2.2　实验法

"验证动量守恒定律" 实验是高中物理中重要的验证性实验之一. 本文中，笔者试图通过实验来导出动量守恒定律（为了方便理解，仅讨论系统在水平方向上的动量守恒）. 本实验中我们通过间接地测量物理量，利用了"思维逆向法" 和"转换法" 等物理思想方法来导出动量守恒定律.

如图 1 所示，$O$ 点是小球抛出点在地面上的垂直投影，在这个装置上有球 1 和球 2. 首先，我们让球 1 多次从斜轨上的 $S$ 点位置静止释放，找到其平均落地点的位置 $P$ 点，测得平抛射程 $OP$. 接下来，我们让球 2 静止放在 $O'$ 点位置，让球 1 多次从斜轨上的 $S$ 点位置静止释放，找到球 1 和球 2 平均落地点的位置 $M$ 点和 $N$ 点，测得平抛射程分别为 $OM$ 和 $ON$.

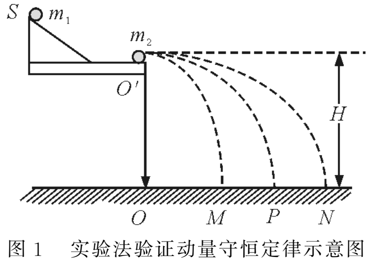


图 1　实验法验证动量守恒定律示意图

当球 1 未与球 2 碰撞时，飞出的水平距离为 $OP$，在空中运动时间为 $t$，则

$$v = \frac{OP}{t}$$

球 1 与球 2 碰撞后飞出的水平距离分别为 $OM$ 和 $ON$，则

$$v_1 = \frac{OM}{t} \qquad v_2 = \frac{ON}{t}$$

由于小球做平抛运动，则小球的水平速度与飞行时间的乘积在数值上就等于小球飞出的水平距离. 又因为下落的高度相同，运动的时间就相同[4]，因此小球的水平速度可以用飞出的水平距离来表示.

通过对 $m_1$，$m_2$，$OP$，$OM$，$ON$ 的测量，可以得到

$$m_1\ OP = m_1\ OM + m_2\ ON$$

则

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

那么球 1 和球 2 组成的系统在碰撞前后动量守恒（水平方向上）. 虽然用此方法导出动量守恒定律存在着特殊性，但仍然在一定程度上说明了动量守恒定律的基础性和普遍性.

### 2.3　牛顿定律法

利用牛顿第二定律、牛顿第三定律和动量定理导出动量守恒定律.

设质点系有 $n$ 个质点，第 $i$ 个质点的质量为 $m_i$，速度为 $\boldsymbol{v}_i$，外界物体对该质点作用的力为 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$，称为外力；质点系内其他质点对该质点作用的力为 $\boldsymbol{F}_i^{(i)}$，称为内力.

由动量定理公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$$

得出质点动量为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_i\,\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

将质点系内 $n$ 个方程相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_i\,\boldsymbol{v}_i = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_i^{(i)}$$

由于质点系内质点间相互作用的内力总是共线、反向、等值，成对出现，故其内力矢量之和等于零，即

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(i)} = 0$$

又由于 $\sum m_i\,\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{p}$，得到质点系动量定理的微分形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{1}$$

得质点系动量对时间的导数等于质点系所受外力的矢量和.

质点系动量定理是矢量式，应用时常选取适当的投影形式，式(1) 在直角坐标轴上的投影式为

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x^{(e)} \quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y^{(e)} \quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_z^{(e)}$$

可见,质点系的总动量改变仅取决于作用于质点系的外力,而与内力无关.

(1) 当外力系的主矢量恒等于零时,即 $\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} \equiv 0$,则 $\boldsymbol{p}=\sum m_i \boldsymbol{v}_i=$ 常矢量,质点系动量守恒.

(2) 当外力系主矢量在某轴(如 $x$ 轴)上的投影恒等于零时,即 $\sum F_x^{(e)} \equiv 0$,则 $p_x=$ 常量,质点系在 $x$ 轴上的动量守恒.

上述即为通过牛顿定律导出质点系动量守恒定律的过程.

### 2.4 伽利略变换法

如图 2 所示,在惯性参照系 $\sum$ 中,考虑两个自由粒子 1 和 2 ,它们的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$,具有初始速度 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$.

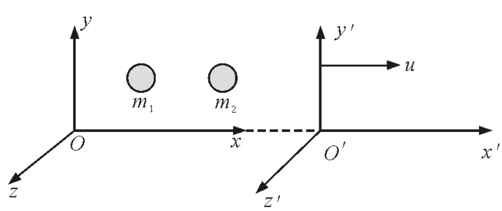


图 2 伽利略变换法验证动量守恒定律示意图

假设它们的初始位置及最终位置都相隔很远,这两个粒子在初始及最终阶段都没有相互作用,则它们的初始动能

$$E_{k0}=\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{20}^2$$

现在让这两粒子碰撞,碰撞后的动能

$$E_k=\frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

其中 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是碰撞后的速度.

由能量守恒定律得

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{20}^2= \frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2+\Delta E_k \tag{2}$$

其中 $\Delta E_k$ 是由碰撞所引起的系统动能的损失量. 若为完全弹性碰撞,则 $\Delta E_k=0$;若为完全非弹性碰撞,则 $\Delta E_k=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}E_{k0}$($E_{k0}$ 代表原有动能);若为非完全弹性碰撞,则 $\Delta E_k>0$. 这里,我们已假设粒子的质量 $m_1$ 和 $m_2$ 在碰撞过程中保持不变.

现在从 $\sum'$ 系来观察这同一次碰撞,$\sum'$ 系以匀速 $u$ 相对于 $\sum$ 运动. 在 $\sum'$ 系中,初速度是 $\boldsymbol{v}'_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}'_{20}$,末速度是 $\boldsymbol{v}'_1$ 和 $\boldsymbol{v}'_2$,则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}'_{10}=\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}'_{20}=\boldsymbol{v}_{20}-\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v}'_1=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{3}$$

在 $\sum'$ 系中,能量守恒定律的表达式为

$$\frac{1}{2}m_1 v'^2_{10}+\frac{1}{2}m_2 v'^2_{20}= \frac{1}{2}m_1 v'^2_1+\frac{1}{2}m_2 v'^2_2+\Delta E_k \tag{4}$$

由伽利略变换可知:

(1) 所有惯性系中时间是相同的,即 $t'=t$,或者说时间与参考系的运动状态无关,即时间是绝对的. 由此可得出同一事件在不同惯性系经历的时间间隔也是相同的,即 $\Delta t'=\Delta t$,这表明在伽利略变换下时间间隔也是绝对的.

(2) 在不同的惯性系里,同一时刻作两点之间的距离测量,结果也是相同的,即 $\Delta L'=\Delta L$,空间长度与参考系的运动状态无关,即空间长度是绝对的.

(3) 在伽利略变换下,速度是相对的,加速度是绝对的,即 $v_x'=v_x-u$,$a_x'=a_x$.

总之,在伽利略变换下,$t$,$L$,$a$ 都是绝对的,此外牛顿力学中力 $\boldsymbol{F}$,质量 $m$ 也不变,这就必然导致在所有惯性系中力学定律,即牛顿运动定律、能量守恒定律和动量守恒定律都是相同的,即具体表述时有相同的数学形式. 也就是说,能量守恒定律在伽利略变换下具有不变性.

如果能量守恒定律在伽利略变换下具有不变性,那么,在 $\sum'$ 和 $\sum$ 两参考系中,初始动能都必须等于最终的动能加上动能损失量 $\Delta E_k$. 就是说式(2) 和式(4) 一定都成立.

将式(3) 代入式(4),得到 $\sum'$ 系的能量守恒定律为

$$\frac{1}{2}m_1(v_{10}^2-2\,\boldsymbol{v}_{10}\cdot\boldsymbol{u}+u^2)+ \frac{1}{2}m_2(v_{20}^2-2\,\boldsymbol{v}_{20}\cdot\boldsymbol{u}+u^2)= \frac{1}{2}m_1(v_1^2-2\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{u}+u^2)+ \frac{1}{2}m_2(v_2^2-2\,\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}+u^2)+\Delta E_k$$

这个式子中如果

$$(m_1\boldsymbol{v}_{10}+m_2\boldsymbol{v}_{20})\cdot\boldsymbol{u}=(m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{u} \qquad (5)$$

那么式(5)就和在$\sum$系中能量守恒定律式(2)完全相同了.

由于式(3)对应于任何$\boldsymbol{v}$值都成立,则有

$$m_1\boldsymbol{v}_{10}+m_2\boldsymbol{v}_{20}=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2$$

这正是动量守恒定律.

### 2.5 空间的均匀性

经典物理学中的空间对称性概念总是和某种变换下的不变性相联系,物理学中的对称性将导致物理规律的不变性.空间对称性原理表述为:

(1)空间的均匀性;

(2)空间各向同性;

(3)时间的均匀性.

经典力学中的动量守恒、角动量守恒和能量守恒是分别由空间均匀性、空间各向同性和时间均匀性所致,鉴于本文只应用空间均匀性导出动量守恒定律,故不对原理(2)、(3)加以评述.

空间的均匀性在物理学中起着非常重要的作用,若没有均匀性,自然定律也就不存在了.空间的均匀性意味着在没有任何物质存在的物理空间内每一点的性质相同.因此,我们可以选任意一点为坐标原点,而原点不同的坐标系的性质也应当相同[5].下面我们利用空间均匀性来推导动量守恒定律.

在经典力学中,设一个由几个质点组成的孤立系统,这一力学体系用拉格朗日函数$L(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i,t)$来描述,如图3所示.

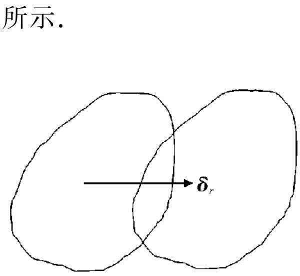


图3 从空间的均匀性角度分析动量守恒

空间的均匀性意味着坐标可以任意平移而不会改变体系的力学性质.即当空间有一任意无穷小平移$\boldsymbol{\delta}_r$时,反映体系力学性质的拉格朗日函数$L$不会发生改变.当系统整体在空间向任意方向平行移动时,即

$$\boldsymbol{r}_i\to\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{\delta}_r$$

根据空间均匀性它的力学性质不变,则体系在平移情况下拉格朗日函数$L(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i,t)$保持不变,质点组整体平移任意的无穷小位移$\boldsymbol{\delta}_r$时,则

$$L(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i,t)\to L(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{\delta}_r,\boldsymbol{v}_i,t)=L(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i,t)$$

由
$$\delta L=L(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{\delta}_r,\boldsymbol{v}_i,t)-L(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i,t)=0$$

故
$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{\delta}_r=0$$

由于$\boldsymbol{\delta}_r$是任意的微元位移,故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_i}=0$$

利用拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_i}=0$$

得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_i}=0$$

则体系的总动量

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_i}=\sum\boldsymbol{p}_i=\text{恒矢量}$$

这正是动量守恒定律.

由上述分析可见,是空间的均匀性导致了孤立系统的动量守恒.因此,我们说动量守恒定律的存在不是偶然的,它是空间均匀性原理的自然结果.

### 2.6 量子力学法

在量子力学中,系统所处的状态由薛定谔方程的波函数$\Psi(x,t)$来描述[6].此时某力学量$\hat{F}$的平均值$\bar{F}$由下式决定

$$\bar{F}=\int\Psi^*(x,t)\hat{F}\Psi(x,t)\mathrm{d}x$$

由量子力学理论可知,若力学量$\hat{F}$为守恒量,则表现为该力学量的算符与体系哈密顿量算符$\hat{H}$满足对易关系,即$\dfrac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}t}=[\hat{F},\hat{H}]=0$.在此我们利用这一关系和空间平移不变性来推导动量守恒定律,为了方便理解,在此仅论证沿$x$方向动量守恒,即论证$[\hat{p}_x,\hat{H}]=0$.

如图4所示,由于在空间平移不变性的体系中,当体系沿$x$方向移动任意无穷小位移$\delta_x$,即

$$x\to x'=x+\delta_x$$

由于空间平移不变性,则哈密顿量$\hat{H}$不变,即有

$$\bar{H}=\int\Psi^*(x)\hat{H}\Psi(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int\Psi^*(x+\delta_x)\hat{H}\Psi(x+\delta_x)\mathrm{d}x \qquad (6)$$

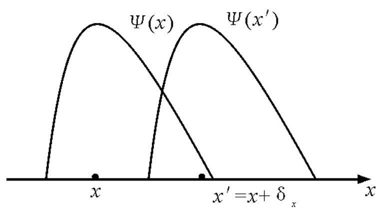


图 4　量子力学法分析动量守恒

将 $\Psi(x+\delta_x)$ 泰勒展开，得

$$\Psi(x+\delta_x)=\Psi(x)+\delta_x\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}=$$

$$\Psi(x)\left(1+\delta_x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

引入动量算符

$$\hat{p}_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

则 $$\Psi(x+\delta_x)=(1+\frac{\delta_x\hat{p}_x i}{\hbar})\Psi(x)$$

代入式(6)中得

$$\int\Psi^*(x)\hat{H}\Psi(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int\Psi^*(x)\times\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta_x\hat{p}_x\right)\hat{H}\left(1+\frac{i}{\hbar}\delta_x\hat{p}_x\right)\Psi(x)\mathrm{d}x$$

则 $$\hat{H}=\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta_x\hat{p}_x\right)\hat{H}\left(1+\frac{i}{\hbar}\delta_x\hat{p}_x\right)=$$

$$\hat{H}-\frac{i}{\hbar}\delta_x[\hat{p}_x,\hat{H}]$$

从而可得

$$[\hat{p}_x,\hat{H}]=0$$

由此笔者通过量子力学中的空间平移不变性导出了动量守恒定律.

## 3　结束语

本文通过哲学思想、实验、理论和数学的逻辑演绎等几种不同的方式导出动量守恒定律，不仅强化了我们对动量守恒定律的认识和应用，而且扩大了动量守恒定律与其他相关物理知识的联系，同时也锻炼了我们的物理思维能力. 当然，实践证明，无论是经典的或近代物理的实验，都证明了这一基本定律. 直至目前还没有发现违背动量守恒定律的现象. 动量守恒定律不仅适用于牛顿力学，甚至牛顿力学失效的地方仍然适用，且和空间均匀性紧密相联. 因此，动量守恒定律是一条最基本、最普遍的绝对守恒定律.

## 参 考 文 献


1　冯杰. 大学物理专题研究. 北京：北京大学出版社，2011. 325

2　邓发明. 关于动量守恒定律的讨论. 西南民族大学学报(自然科学版)，2004，30(6)：856 ～ 858

3　张太荣. 动量守恒定律的演变. 六盘水师范高等专科学校学报，2004，16(6)：13 ～ 15

4　李艳东. 对“动量守恒定律”实验的方法归纳. 才智，2008(18)：132

5　刘英，程立斌. 对动量守恒定律的几点讨论. 上饶师专学报，1992，19(6)：25 ～ 29

6　曾谨言. 量子力学. 北京：科学出版社，1982. 167 ～ 169


# Taking about the Derivation Method on Law of Conservation of Momentum


Zhang Yue　Feng Jie

(College of Mathematics and Physics, Shanghai Normal University, Shanghai　200234)



**Abstract**: The law of conservation of momentum is common in the nature of law and has a broad application field, applies not only to macroscopic movement of the object, also apply to the micro field. In current textbooks of most, however, are all derived from Newton′s second law and the law of Newton′s third law of conservation of momentum, it can make people ignore other export momentum conservation. This paper tries to expound several different ways of export of conservation of momentum, strengthen the awareness of the law of conservation of momentum and the application.



**Key words**: the law of conservation of momentum; momentum; export