探究均匀带电直线和圆弧产生电场的关系

郑 金
(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2016-05-06)

摘 要:利用微元法和对应性推证了均匀带电直线与均匀带电圆弧产生的电场等效;利用微元法和对称性推导了均匀带电圆弧在圆心的场强公式;利用结论巧妙解答有关线性带电体的场强计算问题.

关键词:带电直线 带电圆弧 电荷线密度 场强

均匀带电直线产生的电场与均匀带电圆弧产生的电场在一定条件下是等效的,由此可将直线带电体转化为圆弧带电体,利用这种等效法解答某些线性带电体的场强问题,可化繁为简.

1 均匀带电线段产生的电场

【例 1】如图 1 所示,平面上有一段长度为 l 的均匀带电直线 AB,在该平面内取直角坐标系 xOy,原点 O 为 AB 中点,AB 沿 x 轴,

(1) 试证明该平面上任一点 P 的电场方向沿 $\angle APB$ 的角平分线;

(2) 试证明该平面上的电场线为一簇双曲线;

(3) 试求该平面上的等势线方程.

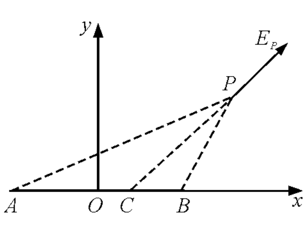

图 1 例 1 题图

解析:(1) 设 $\angle APC=\angle BPC=\alpha$,将 $\angle APC$ 和 $\angle BPC$ 都均匀细分为 n 等份,则每个角 $\Delta\theta=\dfrac{\alpha}{n}$ 对应直线 AB 上一带电线元 Δx,放大图如图 2 所示. 以点 C 为起点,设第 i 个 $\Delta\theta=\dfrac{\alpha}{n}$ 角所对应的线元到 P 点的距离为 $PF=r$,P 点到直线 AB 的垂直距离为 h,则 $\Delta x=\dfrac{r\Delta\theta}{\cos\theta_i}$,而 $\cos\theta_i=\dfrac{h}{r}$,则 $\Delta x=\dfrac{r^2\alpha}{nh}$,设直线单位长度带电荷量为 λ,则线元带电荷量为 $\Delta q=\lambda\Delta x=\lambda\dfrac{r^2\alpha}{nh}$,它在 P 点产生的电场强度大小为 $E_i=\dfrac{k\Delta q}{r^2}=\lambda\dfrac{k\alpha}{nh}$. 可见每个线元在 P 点产生电场的强度大小相等. 由于点 C 两侧相对于角平分线 PC 有 $i\Delta\theta$ 角位移的线元电荷一一对称,由菱形的性质可知每一对线元在 P 点产生的合电场强度均沿角平分线 PC 方向,因此均匀带电直线 AB 产生的合场强沿角平分线 PC 方向,所以均匀带电直线 AB 在平面上的任一点 P 产生的电场方向,都沿该点对直线 AB 的张角的平分线方向.

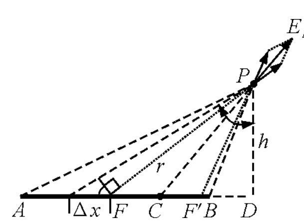

图 2 局部放大图

(2) 双曲线的性质. 各点的切线平分焦点三角形的顶角. 由于均匀带电线段的场强方向平分底边固定的三角形的顶角,而场强方向沿电场线的切线方向,因此电场线为一簇双曲线,线段 AB 的两个端点是双曲线的焦点,半焦距为 $c=\dfrac{l}{2}$. 设半实轴长度为 a,则 $a<\dfrac{l}{2}$,随着 P 点位置不同,a 可取一系列不同的值.

(3) 椭圆的性质. 各点的法线平分焦点三角形的顶角. 由于均匀带电直线段的场强方向平分底边固定的三角形的顶角. 而场强方向沿电场线的切线方向,等势线与电场线处处垂直,因此等势线为一簇半焦距为 $c=\dfrac{l}{2}$ 的椭圆,半长轴为 $a>\dfrac{l}{2}$,其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{4a^2-l^2}=1$$

随着 P 点位置不同，a 可取一系列不同的值.

2　均匀带电圆弧产生的电场

【例 2】若正电荷 Q 均匀分布在半径为 R，圆心角为 2α 的圆弧上，则圆心处的场强为多大？

解析：以对称轴为坐标轴建立如图 3 所示的直角坐标系.

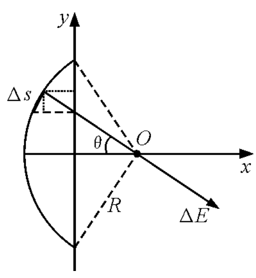

图 3　例 2 题图

由对称性可知，圆心处的场强沿 x 轴方向. 取一小段圆弧 Δs，则电荷量为

$$\Delta Q=\lambda\Delta s$$

其中 $\lambda=\frac{Q}{2\alpha R}$ 为电荷线密度，当 $\Delta s\to 0$ 时，ΔQ 可视为点电荷，在圆心产生的场强为

$$\Delta E=k\frac{\Delta Q}{R^2}=\lambda\frac{k\Delta s}{R^2}$$

在 x 轴方向的分量为 $\Delta E_x=\frac{k\lambda}{R^2}\Delta s\cos\theta$，而 $\Delta s\cos\theta=\Delta y$，则

$$\Delta E_x=\frac{k\lambda}{R^2}\Delta y$$

所以各场强分量的叠加为合场强

$$E=\sum\Delta E_x=\frac{k\lambda}{R^2}\sum\Delta y$$

由对称性可知 $\sum\Delta y=2R\sin\alpha$，因此，有

$$E=\frac{2k\lambda}{R}\sin\alpha=\frac{kQ}{\alpha R^2}\sin\alpha$$

这是圆心角为 2α 的均匀带电圆弧在圆心产生的场强公式.

在上述推导过程中综合利用了微元法、叠加法、分解法和对称性.

结论 1：均匀带电的圆心角为 2α 的圆弧在圆心产生的场强为 $E=\frac{2k\lambda}{R}\sin\alpha$.

对于均匀带电的四分之一圆周，圆心角为 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $E=\frac{\sqrt{2}k\lambda}{R}$. 对于均匀带电的半圆弧，$2\alpha=\pi$，在圆心处产生的场强大小为 $E=\frac{2k\lambda}{R}$.

3　均匀带电直线和圆弧产生电场的关系

【例 3】如图 4 所示，一直线 AB 均匀带电，电荷线密度为 λ，过其一端 B 做垂线，垂线上的 P 点到带电直线的距离为 R；以 P 点为圆心的弧线 $A'B$ 与直线相切于 B 点，均匀带电，电荷线密度也为 λ，求证：均匀带电直线 AB 在 P 点产生的场强与均匀带电圆弧 $A'B$ 在圆心产生的场强相等.

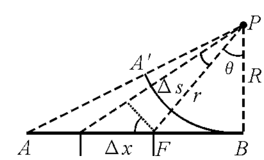

图 4　例 3 题图

证明：对于同一圆心角，直线上的微元 Δx 与圆弧上的微元 Δs 相对应，设其对圆心的张角为 $\Delta\theta$，右端到圆心的距离为 $PF=r$，如图 4 所示，可知 $\Delta x=\frac{r\Delta\theta}{\cos\theta}$，而 $\cos\theta=\frac{R}{r}$，因此 $\Delta x=\frac{r^2\Delta\theta}{R}$. 已知直线单位长度带电荷量为 λ，所以线元带电荷量为 $\Delta q=\lambda\Delta x=\lambda\frac{r^2\Delta\theta}{R}$，它在 P 点产生电场的强度大小为

$$E_i=\frac{k\Delta q}{r^2}=\lambda\frac{k\Delta\theta}{R}$$

磁场方向沿 P 点对角线的平分线方向.

线元对应的小段圆弧长度为 $\Delta s=R\Delta\theta$，带电荷量为 $\Delta q=\lambda\Delta s=R\lambda\Delta\theta$，它在 P 点产生电场的强度大小为 $E'_i=\frac{k\Delta q}{r^2}=\lambda\frac{k\Delta\theta}{R}$. 可见，$E'_i=E_i$，且方向相同.

这表明，只要均匀带电直线一端与均匀带电圆弧一端相切重合，另一端位于同一半径所在的直线上，即直线与圆弧对圆心的张角相等，那么任意画一个圆心角所截取的两部分带电体在圆心产生电场的强度相同. 所以从整体角度而言，均匀带电直线 AB 在 P 点产生电场的强度与均匀带电圆弧 $A'B$ 在圆心产生电场的强度大小相等，方向相同.

回顾例 1，图 2 相当于图 4 的一部分，如图 5 所

示，但其中直线的延长线与圆弧的延长线仍然相切与点 D，这是结论成立的前提条件. 另一方面，对于两道例题的解答方法是相似的而且是统一的.

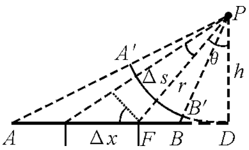

图 5　图 2 与图 4 对比图

结论 2：以直角三角形的一个锐角顶点为圆心，以所在直角边为半径在三角形内画圆弧与另一直角边相切于直角顶点，若圆弧与相切的直角边均匀带电且电荷线密度相同，则任意一个圆心角所截取的圆弧和线段分别在圆心产生电场的场强大小相等，方向相同.

由图 4 可知，四分之一圆周对应一条射线，而半圆周对应一条无限长直线.

结论 3：均匀带电无限长直线在空间某点产生的电场跟以该点为圆心且与直线相切的均匀带电半圆弧在圆心所产生的电场是等效的. 均匀带电无限长直线在距离为 x 处的场强大小为 $E=\dfrac{2k\lambda}{x}$.

利用上述结论解答有关问题简便快捷，下面举例分析.

【例 4】如图 6 所示，长直线与圆弧相切，若直线和圆弧上的电荷均匀分布，电荷线密度为 λ，圆弧半径为 R，求圆心处的场强.

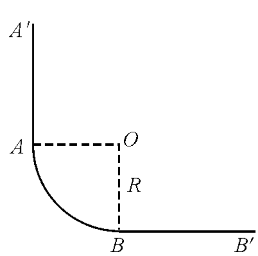

图 6　例 4 题图

解析：根据结论 3，图 6 可等效为图 7，由于圆弧 AA' 与 BB' 关于圆心对称，因此合场强为零，则余下四分之一圆周的圆弧线 AB 的圆心角为 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，由结论 1 可知在圆心处产生电场的强度为

$$E=\frac{\sqrt{2}\,k\lambda}{R}$$

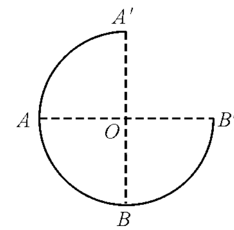

图 7　图 6 的等效图

该题与第五届全国中学生物理竞赛预赛试题中的第 8 题相似.

【例 5】在如图 8 所示的直角坐标系中，两段 $\dfrac{1}{4}$ 圆环大小相同，电荷均匀分布，所带电荷量已在图中标出，而且两段 $\dfrac{1}{4}$ 圆环间彼此绝缘. 求坐标原点 O 处的电场强度是多少？

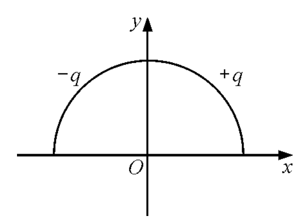

图 8　例 5 题图

解析：根据对称性，可知圆弧在圆心产生的场强沿各自的对称轴方向，如图 9 所示. 每个 $\dfrac{1}{4}$ 圆环的圆心角为 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，电荷面密度为 $\lambda=\dfrac{2q}{\pi R}$，代入公式 $E=\dfrac{2k\lambda}{R}\sin\alpha$ 可得场强大小都为 $\dfrac{2\sqrt{2}\,kq}{\pi R^2}$，由场强叠加原理可知合场强大小为 $E=\dfrac{4kq}{\pi R^2}$. 方向沿 x 轴负方向.

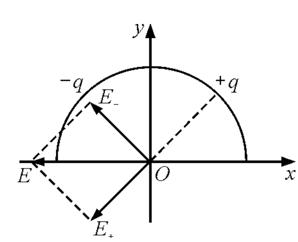

图 9　分析场强矢量示意图

总之，对于均匀带电的直线和圆弧产生的电场在某种条件下是等效的，均匀带电的直线可转化为均匀带电的圆弧，利用均匀带电圆弧的场强公式和对称性，对有关线性带电体的场强问题可迎刃而解.

参 考 文 献

1　沈晨. 静电场：原理与方法. 中学物理教学参考，2005(3)：19，56