



## 电磁感应中辅助线的运用

徐大印

(烟台大学光电学院物理系 山东烟台 264005)

(收稿日期:2016-05-26)

**摘要:**以法拉第电磁感应现象中的一道习题为例,简单地探讨了利用辅助线处理电磁场问题时应该注意的一些事项.

**关键词:**电磁感应 辅助线

在大学普通物理的学习过程中,辅助线的运用十分重要,恰当地运用辅助线方法能够有助于深入地理解物理问题中蕴含的物理规律,对处理有些问题能够起到简洁明快、事半功倍的作用.而不恰当地引入辅助线,往往容易引起学生的困惑,进而产生对物理规律的错误理解.这里我们以电磁场中法拉第电磁感应现象中的一道习题着手,简单地讨论在电磁场中运用辅助线的过程中应该注意的一些事项.

**【例题】**在半径为  $R$  的圆柱面内部,充满磁感应强度为  $B$  的均匀磁场(垂直于平面向内).有一个长度为  $L$  的金属棒放在磁场中,设磁场以  $\frac{dB}{dt} > 0$  变化,求棒中的感生电动势大小.如图 1 所示(为了更清晰地作出辅助线,磁场只标出了上半部分).

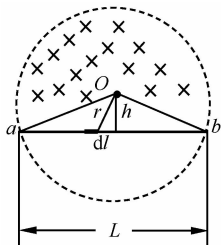


图 1 例题题图

这道题一般有两种解法.

**解法 1:**对感应电场直接积分

根据法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

在棒上面  $dl$  处的电场强度大小为

$$E_i = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (2)$$

方向为与  $r$  垂直的方向.

由式(1)和(2)得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} &= \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{r \cos \theta}{2} \frac{dB}{dt} dl = \\ &= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b dl \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\theta$  是  $r$  与  $h$  的夹角.

根据三角形关系

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

代入式(3)可以得到感生电动势大小

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} L \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \frac{dB}{dt} \quad (4)$$

**解法 2:**辅助线方法

从圆心  $O$  点向金属导体棒两端引入辅助线  $Oa$  和  $Ob$ , 根据法拉第电磁感应定律式(1),有

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon_{Oa} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{Ob} = -S_{\triangle Oab} \frac{dB}{dt} \quad (5)$$

本题中由变化的磁场产生的电场是涡旋电场,电场线是从圆心向外的一系列同心圆,因此  $\varepsilon_{Oa} = \varepsilon_{Ob} = 0$ , 所以,金属棒上产生的电动势大小为

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} L \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \frac{dB}{dt}$$

与解法 1 结果相同,而辅助线的方法简洁明了.

由上面的例子可以进一步引申出图2问题,题中其他条件与图1中的一致,定性比较一下金属棒 $ab$ 和金属棒 $acb$ 中感生电动势的绝对值大小.

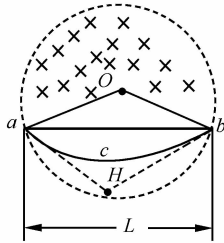


图2 引申题图

这道题原则上可以通过上面的两种方法求出来,但是利用第一种方法,由式(3),由于 $r\cos\theta$ 是一个变值,在没有给出更具体条件时,针对金属棒 $acb$ 不能够求出来,也不容易看出 $\epsilon_{ab}$ 和 $\epsilon_{acb}$ 的大小关系.

利用辅助线法就很容易定性比较出来,同样从原点 $O$ 向左右两端引入辅助线 $Oa$ 和 $Ob$ ,由式(1),对不规则图形有

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \epsilon_{Oa} + \epsilon_{acb} + \epsilon_{Ob} = -S_{Oacb} \frac{dB}{dt}$$

由上面我们知道 $\epsilon_{Oa} = \epsilon_{Ob} = 0$ ,所以有

$$\epsilon_{acb} = -S_{Oacb} \frac{dB}{dt}$$

又因不规则图形 $S_{Oacb} > S_{\Delta Oab}$ ,所以 $|\epsilon_{acb}| > |\epsilon_{ab}|$ .可以看出利用辅助线的方法可以很直观地得到答案.

但是学生在学习的过程中容易产生这样的疑惑,比如说图2中为什么不引入虚线 $Ha$ 和 $Hb$ ?这样做辅助线, $\epsilon_{Ha}$ 和 $\epsilon_{bH}$ 是公共部分可以抵消掉,而 $S_{\Delta Hab} > S_{Hacb}$ ,那么就会得到相反的结论 $|\epsilon_{acb}| < |\epsilon_{ab}|$ .

这个问题初步看起来似乎有道理,但是仔细分

析却是错误的.原因是错误地理解了法拉第电磁感应定律,由式(1),对三角形 $abH$ ,有

$$|\epsilon_{Ha} + \epsilon_{bH} + \epsilon_{ab}| = S_{\Delta abH} \frac{dB}{dt}$$

对不规则图形 $acbH$ ,有

$$|\epsilon_{Ha} + \epsilon_{bH} + \epsilon_{acb}| = S_{acbH} \frac{dB}{dt}$$

由 $S_{\Delta abH} > S_{acbH}$ ,只能得出 $|\epsilon_{Ha} + \epsilon_{bH} + \epsilon_{ab}| > |\epsilon_{Ha} + \epsilon_{bH} + \epsilon_{acb}|$ ,上面的公式在电动势有正有负时,而 $\epsilon_{Ha} + \epsilon_{bH} \neq 0$ 的情况下,不能够得出 $|\epsilon_{acb}| > |\epsilon_{ab}|$ 这个结果,所以这种做辅助线的方法是一种不恰当的方法.有的学生之所以得到 $|\epsilon_{acb}| < |\epsilon_{ab}|$ 这种错误答案,原因是没有注意到电动势是标量,有正、负之分.而从圆心 $O$ 点做辅助线能够成立的原因在于 $|\epsilon_{Oa} + \epsilon_{Ob} + \epsilon_{acb}| > |\epsilon_{Oa} + \epsilon_{Ob} + \epsilon_{ab}|$ 中 $\epsilon_{Oa} + \epsilon_{Ob} = 0$ ,这样才可以直接得到 $|\epsilon_{acb}| > |\epsilon_{ab}|$ .之所以得到错误的结论,从根本上讲是没有仔细地分析物理过程,只是想当然,生搬硬套公式而已.对于这类问题希望能够引起学生们的注意.

通过以上分析,对电磁场中做辅助线来处理物理问题时,要注意两点,一是深入理解公式的物理含义和数学背景;二是做辅助线的时候要根据对称性进行分析,辅助线并不是随便选取的,运用辅助线要十分谨慎.

#### 参考文献

- 1 张三慧. 大学基础物理学(第2版). 北京:清华大学出版社, 2012
- 2 费恩曼, 莱顿, 桑兹. 费恩曼物理学讲义(第2卷). 李洪芳, 王子辅, 钟万蘅译. 上海:上海科学技术出版社, 2009

## Application on Auxiliary Line in Electromagnetic Induction

Xu Dayin

(School of Opt-electronic Information Science and Technology, Yantai University, Yantai, Shandong 264005)

**Abstract:** We take an question in the Faraday electromagnetic induction phenomenon as an example, and briefly discuss some issues that should be paid attention to in the field of electromagnetic field with auxiliary line.

**Key words:** electromagnetic induction; auxiliary line