



弹簧连接两物体能共同做匀加速运动吗

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2016-06-02)

摘 要:利用多种方法对有关弹簧连接的两个物体即弹簧双振子直线运动问题进行定性分析和定量解答,探究了弹簧双振子在两种不同受力条件下的运动形式及规律.

关键词:弹簧连接体 匀加速运动 非惯性系 简谐运动

常见一些有关弹簧两端连接两个物体在外力作用下一起做匀加速直线运动的错题,而这种物理情境是难以实现的.对于由轻弹簧连接的两个物体的直线运动按受力情况可分为两种:其一是弹簧连接体中的一个物体受到恒定动力的作用,则系统的质心做匀加速直线运动;其二是弹簧连接体中的一个物体受到动力的作用而做匀加速直线运动.这两种情形的弹簧连接体不可能共同做匀加速直线运动.下面分别进行探讨.

1 弹簧连接体的质心做匀加速运动

若其中一个物体受到恒定动力的作用,则系统的质心做匀加速直线运动,那么质心可视为非惯性系.两个物体相对于系统的质心做简谐运动.通过定性分析每个物体的受力变化情况,根据牛顿第二定律判断加速度变化情况,可大致画出速度图像.

【例 1】(2009 年高考江苏卷)如图 1 所示,两质量相等的物块 A 和 B 通过一轻质弹簧连接, B 足够长,放置在水平面上,所有接触面均光滑.弹簧开始时处于原长,运动过程中始终处在弹性限度内.在物块 A 上施加一个水平恒力 F ,在 A 和 B 从静止开始运动到第一次速度相等的过程中,下列说法中正确的有()

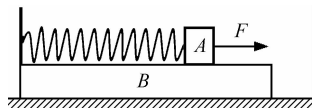


图 1 例 1 题图

- A. 当 A 与 B 加速度相等时,系统的机械能最大
- B. 当 A 与 B 加速度相等时, A, B 的速度差最大
- C. 当 A 与 B 的速度相等时, A 的速度达到最大

D. 当 A 与 B 的速度相等时,弹簧的弹性势能最大

解析:图 2 所示为光滑水平面上的弹簧双振子,若 $m_1 = m_2$,则与图 1 等效.通过分析两个小球受力大小的变化情况以及速度和加速度的变化情况,可画出质心和两个物体的速度图像如图 3 所示.

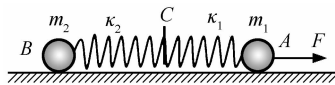


图 2 弹簧双振子中的一个振子受到恒力

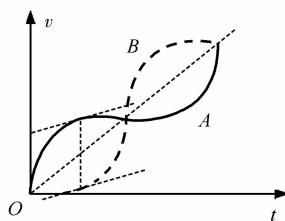


图 3 A 的质量等于 B 的质量时的速度图像

曲线上某点切线的斜率表示加速度,画一条竖直线表示某一时刻,与两条曲线相交,过交点分别作两条切线,当两条切线平行时,对应的加速度相等,由图可见,此时 A, B 的速度差最大,故选项 B 正确;由于拉力始终对系统做正功,机械能始终增加,不可能达到最大,故选项 A 错误;由于两物体始终做加速运动,所以第一次速度相等时,二者的速度都达到最大,故选项 C 正确;由于速度相等时,没有相对运动,则相对位移最大,即弹簧伸长量最大,因此弹簧的弹性势能最大.或者从曲线包围的面积表示相对位移可知,第一次速度相等时,两个曲线之间的面积最大,故选项 D 正确.

在两个物体拉伸弹簧过程中,相对位移一直增大,间距一直增大.要注意相对位移与间距的区别.

如果是压缩弹簧,虽然相对位移一直增大,但间距却一直减小,相对位移表示弹簧的形变量,而间距表示弹簧某时刻的长度.从速度图像可知,当二者速度相等时,加速度不相等;当二者加速度相等时,速度不相等.因此在恒力作用下的弹簧连接体系统不可能一起做匀加速直线运动.

还可从非惯性系的角度进行分析.系统的质心做匀加速直线运动,加速度大小为

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

质心 C 在弹簧上的位置是固定的,以质心 C 为参考系,属于非惯性系,则物体 B 受到惯性力的大小为 $F_B' = m_2 a$,方向向左,等效于重力.右面的弹簧振子受到惯性力的大小为 $F_A' = m_1 a$,方向向左,与恒定外力 F 的合力恒定,等效于重力.即质心 C 把弹簧分为两部分,分别与两个小球构成两个弹簧振子.每个弹簧振子都跟竖直弹簧振子相似,则相对于系统的质心做简谐运动,由于是同一弹簧,则两个弹簧振子的周期相同,因此一个振子相对于另一个振子做简谐运动.在质心做匀加速直线运动的过程中,弹簧长度发生周期性变化,两个小球不可能达到加速度相同的稳定状态.

在图 3 中,倾斜直线表示质心运动的速度图像,函数关系式为

$$v = at = \frac{F}{m_1 + m_2} t$$

由图像形状可知,当第一次速度相等时, A 的加速度最小, B 的加速度最大;对于第一次速度相等之前的图像,若作两条切线都平行于倾斜直线,则两个切点的连线是倾斜的,表明不在同一时刻,由于连线的倾斜角大于 90° ,可知 A 的加速度先等于质心的加速度, B 的加速度后等于质心的加速度,不可能同时等于质心的加速度.

下面定量分析弹簧连接体在恒力作用下的运动.

若两个物体质量相等,则速度图像关于过原点的倾斜直线对称.开始弹簧处于原长时,物体 B 的加速度为零,物体 A 的加速度

$$a_A = \frac{F}{m}$$

系统质心的加速度 $a_c = \frac{F}{2m}$

则物体 A 相对于质心的加速度即二者之差为

$$a_A' = \frac{F}{2m}$$

由于物体 A 相对于质心做简谐运动,在 $t = 0$ 时刻的相对加速度取最大值

$$a_A' = \frac{F}{2m}$$

因此相对加速度随时间变化的关系为

$$a_A' = \frac{F}{2m} \cos \omega t = \frac{F}{2m} \cos \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} t$$

所以物体 A 的加速度关系式

$$a_A = \frac{F}{2m} \left(1 + \cos \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} t \right)$$

可知当 $t = \pi \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}$ 时,物体 A 的加速度恰好第一次减为零,表明此前 A 的加速度一直大于零.只有在两个物体质量相等的条件下,两个物体的速度图像才具有相互对称性,则在半个周期的时间内,物体 A 一直做加速运动,不会出现减速运动的情形,所以选项 C 一定正确.

如果两个物体的质量不相等,那么速度图像如何呢?选项 C 是否正确呢?或者说,两个振子的速度与加速度跟其质量有何关系呢?首先进行定性分析.物体在相同外力作用下,质量越大,加速度越小,即速度增加得越慢,或者说,经历相同的时间,达到的速度较小.由此可知,如果物体 A 的质量大于物体 B 的质量,则速度图像如图 4 所示,选项 C 一定正确.当物体 A 的质量小于物体 B 的质量时,速度图像如

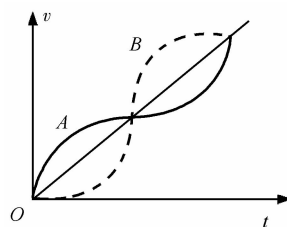


图 4 A 的质量大于 B 的质量时的速度图像

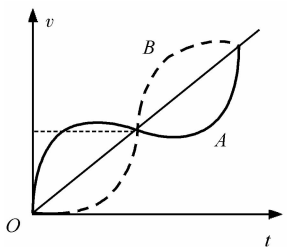


图 5 A 的质量小于 B 的质量时的速度图像

图5所示,可知当A与B的速度第一次相等时,A的速度已经不是最大值,此时选项C错误.下面进行定量分析.

若以物体B为参考系,则物体A相对于B做简谐运动,画出A相对于B的 $v'-t$ 图像如图6所示.

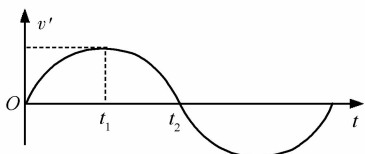


图6 A相对于B的速度图像

在 t_1 时刻,A相对于B的加速度为零,此时 $a_A = a_B, v_A > v_B$.在 $t = 0$ 时刻,弹簧处于原长,在 $t = t_2$ 时刻,弹簧被拉伸至最长,由图6可知,这两个时刻A相对于B的加速度大小相等,方向相反.

在 $t = 0$ 时刻,B的加速度为零,则A相对于B的加速度 $a_1 = \frac{F}{m_1}$ 为正值.

在 $t = t_2$ 时刻,设弹力大小为 f ,则B的加速度 $a_B = \frac{f}{m_2}$.若 $f > F$,则A与B的加速度方向相反,那么A相对于B的加速度

$$a_2 = \frac{f - F}{m_1} + \frac{f}{m_2}$$

为正值,由 $a_1 = a_2$ 得

$$f = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} F$$

若 $f < F$,则A与B的加速度方向相同,那么

$$a_2 = \frac{F - f}{m_1} - \frac{f}{m_2}$$

若假设为正值,则 $a_1 = a_2$ 不成立,只能为负值,由 $a_1 = -a_2$ 得

$$f = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} F$$

由该式可知,若 $m_1 = m_2$,则在 $t = t_2$ 时刻 $f = F$,那么A的加速度一直减小,最后为零,即当 $t = \pi \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}$ 时,A的加速度第一次减为零,因此在半个周期的时间内,速度一直增加,速度图像如图3所示.

若 $m_1 > m_2$,则在 $t = t_2$ 时刻 $f < F$,而弹簧弹力一直增大,那么由牛顿第二定律可知A的加速度一直减小,最后大于零,速度图像如图4所示.

若 $m_1 < m_2$,则在 $t = t_2$ 时刻 $f > F$,表明A后

来受到的合外力方向向左,则加速度先减小到零,再反向增大,即最后加速度小于零,那么速度先增大后减小,速度图像如图5所示.

由图5可知,在A和B从静止开始运动到第一次速度相等的过程中,当二者加速度相同时,A的速度大于B的速度;当二者速度相同时,加速度大小可能相等,但方向相反,因此不可能一起做匀加速运动.

2 弹簧连接体的一个物体做匀加速运动

若其中一个物体受到动力的作用而做匀加速直线运动,则该物体可视为非惯性系.如图7所示,平板车沿水平方向做匀加速直线运动,若以平板车为参考系,则滑块受到一个大小为 ma ,方向与 a 反方向的惯性力,相当于等效重力,与竖直弹簧振子相似,由于竖直弹簧振子相对于悬点做简谐运动的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

与重力无关,因此,滑块相对于平板车做简谐运动,周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

与惯性力无关.弹簧振子与小车的加速度可能某时刻相同,但不可保持加速度相同的稳定状态.

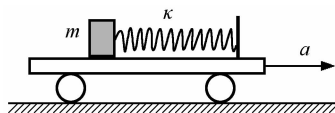


图7 弹簧连接体中的小车做匀加速运动

【例2】如图8所示,升降机的天花板上悬挂一劲度系数 $\kappa = 200 \text{ N/m}$ 的轻质弹簧,弹簧下端拴一个质量为 2 kg 的物体,若升降机自静止开始,以 1 m/s^2 的加速度匀加速上升,物体将如何运动?(取 $g = 10 \text{ m/s}^2$)

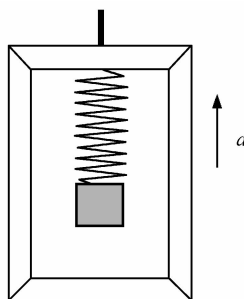


图8 例2题图

分析:升降机以 1 m/s^2 的加速度匀加速上升,表明升降机所受合外力恒定,由于弹簧弹力是变力,因此升降机受到的牵引力不是恒力,那么整体受到的合外力不是恒力.若认为物体相对于系统的质心做简谐运动则是错误的.而实际是物体在非惯性系中做简谐运动,即物体相对于升降机做简谐运动,当物体再次相对于升降机静止时,弹簧伸长量达到最大,然后间距变小.二者的速度图像如图9所示.

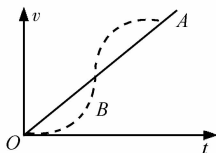


图9 升降机和物体的速度图像

(上接第57页)

由于 F_e 的方向与 z 轴方向相同, F_L 方向与 z 轴方向相反,并在一条直线上,由式(1)、(2)可得 Q_1 受到 Q_2 作用力的合力为

$$F = F_e + F_L = k \frac{\gamma Q_1 Q_2}{r^2} - k \frac{\gamma Q_1 Q_2 v^2}{c^2 r^2} = k \frac{\gamma Q_1 Q_2}{r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (3)$$

式中 $v < c$, 合力的方向与 z 轴方向相同. 当 $v \ll c$ 时, 两个电荷受到的力也就是静电力.

2 用相对论力的变换求电荷受到的作用力

两个电荷静止时只受到静电力的作用,做匀速运动时受到的力发生了变化,而两个电荷的距离、带电的多少都没有变化,显然用相对论的力的变换也可以求出结果.

如图2所示,有 S 和 S' 两个参考系, S' 以速度 u 相对于 S 沿 x 轴方向运动,在 xOy 平面上,有两个相距为 r , 带有等量负电荷的带电点电荷 Q_1 和 Q_2 , 以相同速度 v 沿 x 轴方向运动 ($v = u$).

Q_1 在 S' 系中静止,它受到的力就是静电排斥力

$$F' = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

根据相对论力的变换,在 S 系中观测, Q_1 受到的力在 x, y, z 轴上的分量将为

$$F_x = F'_x$$

总之,对于弹簧双振子系统,若其中一个物体受到恒力作用,则二者的运动都是匀加速直线运动与简谐运动的合运动,不可能共同做匀加速直线运动,也不能说都做简谐运动,而是各自相对于系统的质心做简谐运动,或者说一个物体相对于另一个物体做简谐运动,弹簧长度发生周期性变化,并非保持不变.若其中一个物体做匀加速直线运动,则该物体可视为非惯性系,那么另一个物体相对于非惯性系始终做简谐运动.

参考文献

- 1 张林海,黄振平.一道高考选择题的定量计算.中学物理,2010(5):26
- 2 张征印.奇思妙想 解惑答疑.数理天地,2011(5):35
- 3 张晓红.弹簧题的错解剖析.中学物理,1999(5):46

$$F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y$$

$$F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z$$

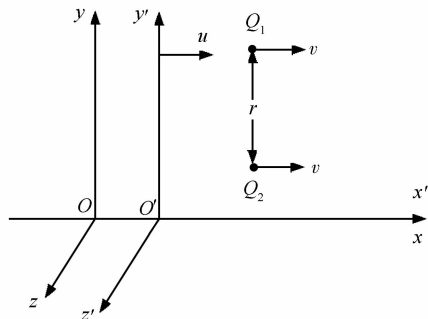


图2 Q_1 和 Q_2 在两个不同参考系 S 和 S' 观测受到不同的力

通过上面对 Q_1 受到力的方向的分析,我们知道 Q_1 受到的作用力在 x 和 z 轴的分量为零,因此,在 S 系中观测到 Q_1 受到的力

$$F = F_y = \frac{1}{\gamma} F' = k \frac{Q_1 Q_2}{\gamma r^2}$$

把上式的分子、分母同乘 γ

$$F = k \frac{\gamma Q_1 Q_2}{\gamma^2 r^2} = k \frac{\gamma Q_1 Q_2}{r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (4)$$

比较式(3)、(4)可见两种不同方法,解答的结果一样.

参考文献

- 1 张三慧.大学物理学.北京:清华大学出版社,1999