路径的选择问题——从费马原理看聪明的光

任雨萌
（西北工业大学附属中学　陕西 西安　710071）
李艳辉
（西安电子科技大学物理与光电工程学院　陕西 西安　710071）

（收稿日期:2016－07－04）

摘　要:利用折算的路程,分析了运动学中的路径选择问题.结合费马原理在折射定律中的应用,建立了光学及运动学中物理描述的对应类比关系.该类比方法为深入理解物理光学的光程等概念提供了新的思路.

关键词:费马原理　最值问题　路径　光程　折射率

两点之间沿直线行进最快,这好像是天经地义的常识,但有时候,情况却并不那么简单.骑兵从 A 点出发要将情报送至 C 点的首长帐篷,行进路径需要经过沙地和草地,如图 1 所示.马在沙地跑得慢,在草地跑得快,骑兵应该怎样选择路径从而由 A 经最短时间到达帐篷 C 呢?

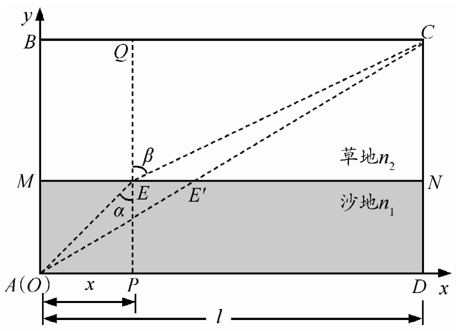

图 1　骑兵最速送信问题示意图

设 E 为草地与沙地分界面上的任意一点,从 A 到 C 在沙地中经过的路径为 AE,运动速度是 v_1,在草地中经过的路径为 EC,速度是 v_2.那么最快到达即要求时间

$$t=\frac{AE}{v_1}+\frac{EC}{v_2} \tag{1}$$

最短.

可以分情况讨论:

(1)先考虑最特殊情况,如果路径上经过的区域是均匀的,即马在沙地和草地上行进的速度相等,$v_1=v_2$.这时 A 与 C 两点之间直线距离最短.显然,沿直线 AC 行进最快.

(2)如果 $v_1<v_2$.若在行进速度慢的沙地"少"走一定的路程,而在行进速度快的草地"多"走一定的路程,则有没有可能实现比沿 AC 直线行进更短的时间呢.为了得到定量的物理解释,需要寻找合适的物理量作为衡量标准.

那么,采用什么物理量作为衡量标准呢?假设一种马可以跑得最快的路面,比如柏油马路,在这种路面上,马行进的速度可用常量表示.则马在不同的路面:沙地及草地的行进距离都可以等效地"折算"到马在柏油马路上行进的距离.

设马在沙土路面上的行进时间

$$t_1=\frac{AE}{v_1}$$

用该时间乘以马在柏油马路上行进的速度 c,即可得到"折算"到马在柏油马路上的行进距离

$$l_1=\frac{AE}{v_1}c$$

同理,把马在草地上的行进距离也折算到其在柏油马路上的行进距离 l_2,最终可得

$$L_{折算}=\frac{AE}{v_1}c+\frac{EC}{v_2}c \tag{2}$$

显然,既然都已"折算"到马在柏油马路上的行

作者简介:任雨萌(2000－　),女,在读高中生.

指导教师:李艳辉(1979－　),女,博士,副教授,主要从事光散射与传播的科研与教学工作.

进距离 $L_{折算}$，则如果这个距离越小，那么骑兵将到达的越快．这样折算后的好处在于，虽然马在沙地及草地中行进的速度不相同，行进的时间也各异，但是，都“折算”到马在柏油马路上运动的距离后，可以方便地比较由 A 到 C 马沿不同的路径运动时的行进距离，进而可以方便地比较诸如最短用时等物理量．

其实，马在不同的路面上行进的速度是一定的，因此马在诸如沙地、草地的行进速度与其在行进最快的柏油路上的行进速度的比值，就反映了这种路面的某种属性．干脆可以用常数 n_1，n_2 来表示这种反映路面自身属性的物理量，它是无量纲量，即

$$n_1=\frac{c}{v_1}\qquad n_2=\frac{c}{v_2}\tag{3}$$

结合式(2)、式(3)，$L_{折算}$ 可表示为

$$L_{折算}=n_1AE+n_2EC=$$
$$n_1\sqrt{EP^2+AP^2}+n_2\sqrt{CN^2+EN^2}\tag{4}$$

因为 A 点与 C 点在 x 轴方向上的间距是固定的，设为 l，如图 1 所示．令 $AP=x$，则 $EN=l-x$．且当 A 点与 C 点确定之后，这两个点投影到 y 轴方向上的距离是确定的，不会因为 E 点的选取而改变．因此，在式(4) 中以 x 为一变量，其最值条件将满足

$$\frac{\mathrm{d}L_{折算}(x)}{\mathrm{d}x}=0$$

时所需时间最短．即

$$n_1\frac{x}{\sqrt{EP^2+x^2}}+n_2\frac{-(l-x)}{\sqrt{CN^2+(l-x)^2}}=0\tag{5}$$

化简得

$$n_1\frac{x}{\sqrt{EP^2+x^2}}=n_2\frac{(l-x)}{\sqrt{CN^2+(l-x)^2}}\tag{6}$$

如果定义 AE 及 EC 与两种界面的法线方向之间的夹角分别为 α 及 β，则有

$$n_1\sin\alpha=n_2\sin\beta\tag{7}$$

其中

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{EP^2+x^2}}$$

$$\sin\beta=\frac{l-x}{\sqrt{CN^2+(l-x)^2}}$$

可以看出，因为 $v_1<v_2$，由式(3) 有 $n_2<n_1$，则由式(7) 可以知道 $\sin\alpha<\sin\beta$，即 $\alpha<\beta$．如图 1 所示，因 $\alpha<\beta$，则有 $AE<AE'$ 而 $EC>E'C$，这不正是我们刚一开始所猜测的 —— 若马在行进速度慢的沙地上“少”走一定的路程，而在行进速度快的草地“多”走一定的路程，将使得由 A 到 C 更快．有意思的是，这时明显走了“折线”而非通常意义上的“直线”，但是到达的却更快了．

(3) 如果 $v_1>v_2$，则采用类似的方法，容易分析出这时使得由 A 到 C 用时最短的两种界面分界线上的转折点 E'' 一定在 E' 点的右侧．这样可以使得马在行进速度快的路面上“多”走一定的路程，而在行进速度慢的路面上“少”走一定的路程，从而使得用时比沿 AC 直线行进更短．

这是一个非常有趣的现象，其实如果了解光，你会敬仰地发现“聪明”的光的计算及分析能力．

我们把图 1 中的问题更换为光从一点 A 出发到达另一点 C，光沿哪一条路径行进将用时最短．

还是设 E 为两种介质分界面上的任意一点．光在真空中的运动速度最快，等效于马在柏油马路上的运动速度 c．只是对光而言，这个速度是 $c=3\times10^8$ m/s，光在不同介质中的传播速度不同，分别是 v_1，v_2．仍可用式(3) 定义的无量纲量来表示不同介质对光传播的某种属性，即这时的 n_1，n_2 分别表示两种介质的“相对折射率”．式(4) 中的 $L_{折算}$ 表示“光程”．它其实也是将光在各个介质中走过的几何路径与相对折射率的乘积，“折算”到光在真空中所走过的路程，用这种方法可以方便地将在不同介质中运动速度不同、运动时间不同所通过的距离，“折算”到光在真空中所走过的距离，以便于问题的研究．因此，光从一点 A 传播到另一点 C 时，将沿所需时间最短的路径传播，这是几何光学中的一条重要的原理，也称最小时间原理，或最短光程原理，是法国数学家费马于 1657 年首先提出的，即著名的“费马原理”．简单地说，费马原理可以理解为：光从空间的一点传到另一点是沿着光程为极值的路径传播的．

如此可见，光在传输过程中总是非常的聪明，它的思考实在是又快又准，令人佩服啊．

参 考 文 献

1　姚启钧．光学教程．北京：高等教育出版社，2002

2　石顺祥，张海兴，刘劲松．物理学与应用光学．西安：西安电子科技大学出版社，2003

3　Born M，Wolf E．Principles of optics oxford (England)．Pergamon Press，1975

(下转第 65 页)

或 $$R = \sqrt{N}\,\sqrt{x^2 + y^2}$$

令上式中 $\sqrt{x^2 + y^2} = l$，则有

$$R = l\,\sqrt{N}$$

所以，醉汉在经过许多次不规则的转身换向后，虽然我们无法确定其最终的位置，但通过上式可以算出他离开灯柱的最可能的距离. 这个距离(R)就等于各次直线行走距离的方均根(l)与其直线行走次数平方根($\sqrt{N}$)的乘积.

现在，让我们从醉鬼走路的研究中再回到布朗运动，在显微镜下可以看到悬浮的固体微粒做着完全无规则的运动，微粒所经历的是一条非常复杂的曲折路径. 虽然微粒运动的无规则性甚于醉汉千百倍，从研究方法来说，两者却是完全类似的.

1905 年，爱因斯坦和波兰物理学家斯莫卢霍夫斯基，分别独立地对布朗运动进行了深入的研究. 他们根据做布朗运动的微粒在每段时间 Δt 内的位移，利用统计平均的方法，从理论上找出了布朗运动中的悬浮粒子不规则运动的方均根位移公式. 根据这个公式推算出在 17 ℃ 水中的悬浮粒子在 1 min 里平均位移大约是 6 μm. 同时，反过来也可以利用所求得的关系测定阿伏加德罗常数 N，得到的值为

$$N = \frac{1}{\lambda^2}\frac{RT}{3\pi k\rho}$$

式中 λ 为微粒的位移，R 为气体常数，T 为绝对温度，k 为粘滞系数，ρ 为微粒半径[6]. 后来，法国物理学家佩兰和他的同事一起，从 1908 年到 1910 年花费了约三年的时间，通过艰苦卓绝的努力，终于出色地完成了对微粒位置和分布规律的测量，证明了实验结果与爱因斯坦理论的一致性，从而奠定了分子动理论的基础.

对布朗运动研究的成功，可以说是 20 世纪初刚建立的统计力学的一项辉煌成果. 在布朗运动的研究中所采用的统计平均方法，具有非常典型的意义. 它向人们指出，即使在如此复杂的运动中，利用统计方法同样可以找出一定的规律性.

参 考 文 献

1 吴翔. 文明之源. 上海：上海科学技术出版社，2001

2 王溢然，束炳如. 中学生物理思维方法丛书：数学物理方法. 合肥：中国科学技术大学出版社，2016

3 束炳如，何润伟. 普通高中课程标准实验教科书物理·选修 3－3. 上海：上海科技教育出版社，2005

4 2013 年北京高考物理试题

5 王溢然，束炳如. 中学生物理思维方法丛书：形象·抽象·直觉. 合肥：中国科学技术大学出版社，2016

6 蒋长荣，王骁勇，刘树勇. 爱因斯坦与布朗运动. 首都师范大学学报(自然科学版)，2005，26(3)：28 ～ 32

(上接第 59 页)

4 竹锦霞. 费马原理与运动性最值问题探讨. 四川文理学院学报(自然科学)，2007，17(2)：30 ～ 31

5 赵凯华，钟锡华. 光学. 北京：北京大学出版社，1984

6 王权. 费马原理证明光的折射定律的一种方法. 潍坊教育学院学报(自然科学版)，1988(1)：44 ～ 46

Path Selection Quesition—Seeing the Smart Light from Fermat Principle

Ren Yumeng

(The Middle School Attached to Northwestern Polytechnical University，Xi′an，Shaanxi 710071)

Li Yanhui

(School of Physics and Optoelectronic Engineering，Xidian University，Xi′an，Shaanxi 710071)

Abstract：Using the equivalent distance，we analyzed the choice of a path in kinematics problem. Combining the application of Fermat principle in the law of refraction，we established the corresponding analogy relationships of optical and kinematics physical description. The analogy method presented in this paper would be helpful for deep understanding of optical concepts such as：optical path etc.

Key words：Fermat principle；extreme value of problems；path；optical path；refractive index