内壁粗糙碗中的动力学问题深度探究（一）

倪　峰
（德清县高级中学　浙江 湖州　313200）

（收稿日期：2016 - 08 - 29）

摘　要：笔者针对物体在粗糙碗类竖直轨道中的动力学问题进行了深入探究，推导出物体逆时针运动的角速度 ω 与转过的角度 θ 关系. 本探究可拓宽读者的视野，提高优秀学生对物理的学习兴趣，发扬探索精神，体会数学与物理结合的美妙.

关键词：内壁粗糙的碗　动力学　二阶常微分方程

具体模型如图 1 所示，物体（可看成质点的物体）在内壁粗糙的碗中从 A 点向下逆时针下滑，碗可以看成半径为 r 的半球面. 物体与粗糙内壁的动摩擦因数为 μ_0. 从 A 点下滑到第一次速度为零位置的整个过程，物体受到 3 个力的作用，分别是重力 mg，摩擦力 F_f，支持力 F_N. 除重力外，其他两个力都是变力. 那如何求得物体在轨道各个位置对应的角速度和速度呢？

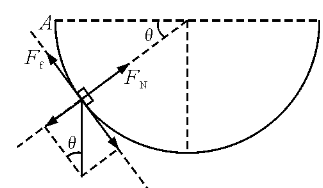

图 1　物体在内壁粗糙的碗中下滑

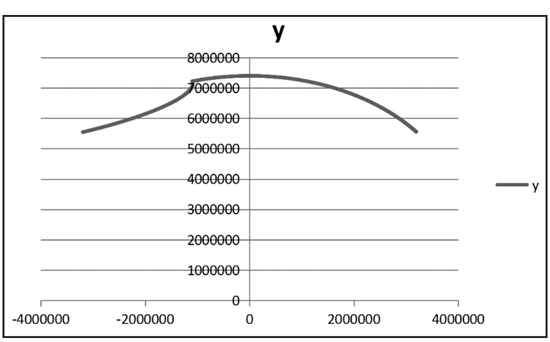

图 8　反导拦截弹的轨迹

经多次尝试，由 Excel 数据计算得，在导弹发射经过 $t=479.7$ s 时，发射拦截弹，在 $t=926.7$ s 时拦截成功. 此时位置坐标（$-1\ 090\ 711$ m，$7\ 219\ 482$ m），如图 9 所示，红圈（表中显示为黑圈）内分别是拦截位置的 x 和 y 坐标及拦截时间，拦截位置距地球表面高度 $\left(\sqrt{1\ 090^2+7\ 219^2}-6\ 400\right)$ km $=900$ km，而大气层厚度为 100 km 左右，所以在大气层外把导弹拦截，图中可以看到有 Excel 模拟画出的导弹在拦截前的飞行轨迹和拦截弹的飞行轨迹，非常形象，这里有误差在，只要 Δt 取得足够小，误差就会非常小，但数据量会很大.

	A	B	C	D	I
4589	-1086786	7182208	-0.22277	3.0447229	925.2
4590	-1087187	7187689	-0.28918	3.3642926	925.5
4591	-1087708	7193744	-0.38139	3.8324597	925.8
4592	-1088394	7200643	-0.52293	4.5847794	926.1
4593	-1089335	7208895	-0.76435	5.881505	926.4
4594	-1090711	7219482	-0.99795	6.7434136	926.7
4595					

图 9　导弹被拦截的坐标及时间

这里提供的是在中学物理中借助Excel研究中段反导的思路，以此为引导开展研究性学习，拓展学生视野，激发学生学习兴趣，为祖国的国防做出贡献.

参 考 文 献

1　卡门线. 百度百科.
2　洲际弹道导弹. 百度百科.
3　课程研发中心，普通高中课程标准实验教科书（物理 2 必修）. 北京：人民教育出版社，2010. 39 ～ 45
4　何勇，关钧睿. 利用计算机手段高效处理物理问题. 物理通报，2014(9)：97 ～ 98

1　小球在粗糙内壁逆时针下滑的角速度 ω 与角度 θ 的关系

令物体逆时针运动的角速度 ω 为正方向，即逆时针 $\omega > 0$. 角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

切向加速度

$$a_t = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

根据牛顿第二定律，切向方向动力学方程为

$$mg\cos\theta - F_f = m a_t = mr\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{3}$$

径向方向动力学方程为

$$F_N - mg\sin\theta = m a_n = m\omega^2 r = m\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 r \tag{4}$$

$$F_f = \mu F_N \tag{5}$$

由式(1) ～ (5) 得

$$mg\cos\theta - \mu\left[mg\sin\theta + m\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 r\right] = mr\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

化简得物体下滑的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\mu\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g\cos\theta}{r} - \frac{\mu g\sin\theta}{r} \tag{6}$$

式(6) 为关于 θ 的二阶非线性常微分方程，比较复杂. 可通过降阶解法，将式(6) 变为一阶.

令

$$Z = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{Z}$$

由于逆时针运动 $\omega > 0$，故

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{Z}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{Z}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{Z}}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\theta}$$

化简式(6) 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\theta} = -\mu Z + \frac{g\cos\theta}{r} - \frac{\mu g\sin\theta}{r}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\theta} + 2\mu Z = 2\left(\frac{g\cos\theta}{r} - \frac{\mu g\sin\theta}{r}\right) \tag{7}$$

式(7) 是关于 θ 的一阶线性非齐次微分方程，至此完成式(6) 的降阶工作.

一阶线性非齐次微分方程 $y + Py = Q$ 的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) \tag{8}$$

令

$$P = 2\mu \qquad Q = 2\left(\frac{g\cos\theta}{r} - \frac{\mu g\sin\theta}{r}\right)$$

代入式(8) 的通解，可解得式(7) 得通解为

$$Z = \mathrm{e}^{-2\mu\theta}\left[\int\left(\frac{2g\cos\theta}{r} - \frac{2\mu g\sin\theta}{r}\right)\mathrm{e}^{2\mu\theta}\,\mathrm{d}\theta + C\right] \tag{9}$$

根据方程

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C \tag{10}$$

和

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C \tag{11}$$

可化简式(9) 得

$$Z = \frac{2g}{r(1+4\mu^2)}[(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta] + C\,\mathrm{e}^{-2\mu\theta} \tag{12}$$

由

$$Z = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

得

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = Z^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{2g}{r(1+4\mu^2)}[(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta] + C\,\mathrm{e}^{-2\mu\theta}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

当 $\theta = 0$ 时

$$\omega = 0$$

解得

$$C = \frac{6g\mu}{r(1+4\mu^2)} \tag{14}$$

将式(14) 代入式(13)，可得

$$\omega = \left\{\frac{2g}{r(1+4\mu^2)}[(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu\,\mathrm{e}^{-2\mu\theta}]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

式(15) 是角速度 ω 关于 θ 的解析解. 可见只要

知道碗轨道的半径 r 和物体与碗的动摩擦因数 μ，就可以根据式(15)，得到物体在粗糙碗中从 A 点下滑做逆时针圆周运动到第一次速度为零这个过程，轨道上各个位置所对应的角速度.

图 2 是利用 Excel 作出 $\omega \sim \theta$ 的关系图.

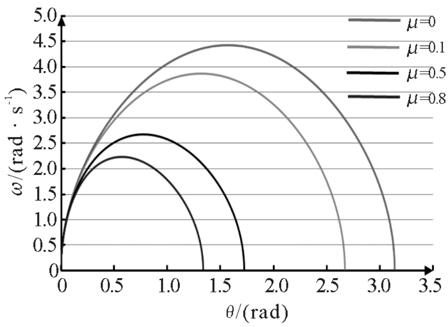

图 2　角速度 ω 与角度 θ 的关系图

取重力加速度 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，轨道半径 $r=1$ m. θ 取点的步长为 $\frac{\pi}{1\ 000}$，计算出大量的数值解，然后画出了 $\mu=0,0.1,0.5,0.8$ 时，对应的 $\omega \sim \theta$ 关系图. 从图中，可以得到物体在粗糙碗中从 A 点下滑做逆时针圆周运动到第一次速度为零这个过程，轨道上各个位置所对应的角速度、速度.

2　关于在粗糙碗中做匀速圆周运动一类题目的商榷

在高中题目中，有一类关于物体只受重力，支持力和摩擦力的情况下，在粗糙碗类内壁竖直轨道上做匀速圆周运动的题目，即 ω 的大小不变. 从式(15)

$$\omega = \left\{\frac{2g}{r(1+4\mu^2)}\left[(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu\, e^{-2\mu\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

这个方程可知，不管 μ 值取多少，ω 的大小都不可能为一个常数. 类似粗糙碗类竖直轨道的匀速圆周运动，现实中并不存在，没有考虑到此模型的可行性，各物理量会出现不自洽，导致题目脱离了实际情况.

3　反思与展望

本文给出了 $\omega \sim \theta$ 的解析解. 但是解二阶非线性常微分方程，仅靠笔算，计算量非常庞大，有时甚至没有解析解. 如果利用数学软件如 MATLAB 或 Mathematica，通过编程，解出二阶非线性常微分方程的数值解，画出图像，往往事半功倍. 当然，数值解法比较适合在求不出解析解的情况下使用. 下阶段，笔者还会在本文基础上，再研究此模型其他物理量之间的关系.

参 考 文 献

1　程守洙，江之永. 普通物理学 2(第五版). 北京：高等教育出版社，2003. 25 ～ 28

2　马文蔚. 物理学(第三版). 北京：高等教育出版社，1994. 5 ～ 20

The In - depth Dynamic Research in Rough Bowl Wall(I)

Ni Feng

(Deqing Senior high school, Huzhou, Zhejiang　313200)

Abstract: A body going around a circle in a vertical loop track which is a classical physical model in senior high school. But, due to the limitations of high school mathematics knowledge, the physical model is often designed in an ideal situation. At present, the dynamic research is very rare in a vertical loop track of rough bowl wall at non ideal circumstances[1][2]. So, this paper researches the dynamics in a vertical loop track of rough bowl wall. This paper deduces the relationships between angular velocity ω and angle of turn θ. This research can broaden reader's horizon, improve the outstanding students' interest in physics learning, develop exploring spirit and realize the beauty of mathematics and physics combination.

Key words: rough bowl wall; dynamic; the second order ordinary differential equation