竞赛与 物理专题研修

# 探究物体在线性力作用下的运动形式

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2017－10－01）

**摘　要**：利用瞬态过程满足的微分方程的标准形式和瞬态过程的表达式，探究了物体在线性力作用下的运动特点及规律.

**关键词**：瞬态过程　指数函数　线性力　直线运动

对于在一定条件下发生的瞬态过程，如电容器和电感线圈在直流电路中的充电或放电过程，各物理量随时间按指数函数规律变化，都将趋于恒定值，即物理量逐渐趋于最大值或最小值，反映在物理图像上，曲线存在水平渐近线. 而且物理量的变化满足一阶线性微分方程 $x_{\infty}=x+\tau\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

瞬态变量的初始值 $f(0)=x_0$、稳态值 $f(\infty)=x_{\infty}$ 和时间常数 $\tau$ 是瞬态过程的三要素，解答这类问题关键是应用物理规律推导出某个变量的微分方程的标准形式，再利用瞬态过程的三要素写出微分方程的通解即瞬态过程的物理量随时间变化的表达式. 下面以物体在线性力作用下的直线运动问题为例进行分析.

## 1　物体只受线性力的作用

线性力 $f=kv$ 的平均值为 $\overline{f}=k\overline{v}$，在一段时间内的冲量大小为 $\overline{f}\cdot\Delta t=k\overline{v}\cdot\Delta t=kx$，即冲量大小跟对应的位移成正比. 如果物体只受线性力做直线运动，则由动量定理有 $\overline{f}\cdot\Delta t=kx=m\cdot\Delta v$，可得

$$\Delta v=\frac{k}{m}x=Ax$$

这表明，速度变化量跟位移成正比，即速度随位移均匀变化，把这种运动称为另类匀变速运动.

如果物体受到的线性力为动力，那么速度随时间如何变化呢？下面推导关系式.

设速度 $v=v_0+Ax$，则加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Av$$

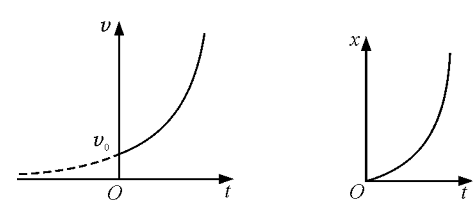
由牛顿第二定律有

$$F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mAv$$

由此得微分方程的标准形式

$$0=v+\left(-\frac{1}{A}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

从数学角度可知微分方程的解为 $v=v_0\mathrm{e}^{At}$，速度随时间按指数规律变化，图像如图 1(a) 所示. 位移为 $x=\dfrac{v_0}{A}(\mathrm{e}^{At}-1)$，图像如图 1(b) 所示.




(a) $v$-$t$图像　　(b) $x$-$t$图像

图 1

从物理角度来说，微分方程中的 $v_{\infty}=0$ 不是稳态速度，系数 $\tau=-\dfrac{1}{A}$ 为负值，不是时间常数. 从受力条件来说，如果线性力为动力，虽然速度随位移均匀增加，但不会出现稳态，这种加速运动过程不是瞬态过程.

那么是否存在速度跟位移成正比的运动呢？假设 $v=Ax$，可写成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax$，即

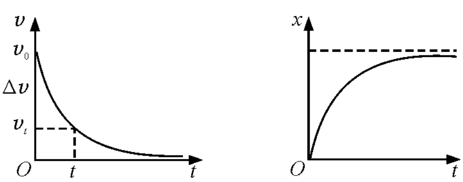
$$0=x+\left(-\frac{1}{A}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

可得 $x=x_0\mathrm{e}^{At}$. 当 $t=0$ 时 $x=x_0$，不为零. 这表明当 $t=0$ 时物体已经发生了位移，因此运动物体的计时起点与位移起点不重合. 如果选择运动物体的计时起点与位移起点重合，那么 $v\neq Ax$，即不存在速度

跟位移成正比的运动，这是因为 $v=v_0\mathrm{e}^{At}$ 中的初速度 $v_0$ 不能为零，则 $v=v_0+Ax$ 中的 $v_0$ 不能为零，所以 $v\neq Ax$. 虽然由 $v=Ax$ 在数学上也可推出 $v=v_0\mathrm{e}^{At}$，但不合实际.

如果物体受到的线性力为阻力，将做何种运动呢？由于减速运动的初速度不为零，那么速度与位移不成正比，而是一次函数关系，即 $v=v_0-Ax$，则加速度为 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-Av$，由此得微分方程的标准形式 $0=v+\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

可知速度稳态值 $v_\infty=0$，时间常数 $\tau=\frac{1}{A}$，则微分方程的解为 $v=v_0\mathrm{e}^{-At}$，位移为 $x=\frac{v_0}{A}(1-\mathrm{e}^{-At})$. 速度图像、位移图像分别如图 2(a)、(b) 所示，都为指数曲线，存在水平渐近线，这种减速运动过程是瞬态过程.



(a) $v$-$t$图像　　(b) $x$-$t$图像

图 2

只要物体受到的作用力跟速度成正比，而且是阻力，做减速运动，就是瞬态过程，因此速度随时间变化的图像存在水平渐近线. 对于这种瞬态过程，速度随位移均匀变化，而不是成正比.

**【例 1】**如图 3 所示，光滑 $U$ 型导轨 $PQMN$ 固定在水平面上，处于竖直向下的匀强磁场中，磁感应强度为 $B$，导轨宽度为 $L$，$QM$ 之间接有电阻为 $R$，其余部分电阻不计. 一质量为 $m$，电阻也为 $R$ 的金属棒 $ab$ 垂直放在导轨上，给棒一个水平向右的初速度 $v_0$ 使之开始滑行，最后停在导轨上，对此过程，求：

(1) 在电阻 $R$ 上产生的焦耳热；

(2) 通过电阻 $R$ 的电荷量和 $ab$ 棒运动的位移；

(3) 位移随时间变化的关系式.

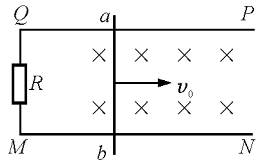


图 3　例 1 题图

**解析：**(1) 棒由运动到静止，机械能转化为电能，再转化为内能，由能量守恒定律可知，电路中产生的焦耳热为 $Q=\frac{1}{2}mv_0^2$，由于棒的电阻也为 $R$，因此在电阻 $R$ 上产生的焦耳热为 $Q_R=\frac{1}{4}mv_0^2$.

(2) 安培力的冲量为 $\overline{F}_At=BL\overline{I}\cdot t=BLq$. 由动量定理有 $-BLq=0-mv_0$，可得电荷量 $q=\frac{mv_0}{BL}$.

安培力的冲量为 $\overline{F}_At=\frac{B^2L^2\overline{v}}{2R}t=\frac{B^2L^2}{2R}x=kx$.

由动量定理有 $-\frac{B^2L^2}{2R}x=0-mv_0$，可得位移的最大值为 $x_\mathrm{m}=\frac{2mRv_0}{B^2L^2}$.

(3) 由于安培力 $F=\frac{B^2L^2}{2R}v=kv$ 是线性阻力，可知金属棒运动速度随时间变化的关系式为 $v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$，由动量定理有 $-kx=mv-mv_0$，可得位移关系式为 $x=\frac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$.

速度图像如图2(a)所示，经历时间$t$对应的位移 $x=\frac{\Delta v}{A}=\Delta v\cdot\tau$，在数值上等于凹边梯形的面积. 虽然导体棒从运动到停止经历的时间在理论上为无穷大，但位移的最大值是确定值 $x_\mathrm{m}=v_0\tau$，而且很快停止运动.

## 2　物体受恒力与线性阻力共同作用

如果物体同时受到恒力与线性阻力的作用而做直线运动，则运动过程为瞬态过程. 物体受到的合力与速度关系是一次函数关系，从数学角度而言，仍然属于线性关系.

**【例 2】**在无风的情况下，一个质量为 $m$ 的雨滴由初速度 $v_0$ 开始在竖直方向自由下落. 受到空气的阻力与速度的一次方成正比，即 $f=kv$，求其运动过程的速度、加速度和位移随时间变化的规律是什么？(雨滴在运动过程中的质量变化忽略不计)

**解析：**雨滴所受重力为恒力 $F=mg$，受空气阻力为 $f=kv$，由牛顿第二定律列出关于速度的一阶线性微分方程为

$$F-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

变形为

$$\frac{F}{k}=v+\frac{m}{k}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

(下转第 55 页)

区域 Ⅰ 中的磁场

$$B_{\mathrm{I}}=B_{\mathrm{II}}=\frac{mv_0}{qR}=0.30\ \mathrm{T}$$

$B_{\mathrm{I}}$ 方向垂直纸面向外，$B_{\mathrm{II}}$ 方向垂直纸面向里，面积为

$$S_{\mathrm{I}}=S_{\mathrm{II}}=\frac{\pi-2}{2}R^2$$

同理可知区域 Ⅱ 中的磁场

$$B_{\mathrm{III}}=B_{\mathrm{IV}}=\frac{2mv_0}{qR}=0.60\ \mathrm{T}$$

$B_{\mathrm{III}}$ 方向垂直纸面向里，$B_{\mathrm{IV}}$ 方向垂直纸面向外，面积为

$$S_{\mathrm{III}}=S_{\mathrm{IV}}=\frac{\pi-2}{8}R^2$$

## 4　合理推广 拓展视野

通过磁聚焦模型中的磁区设计，实现了平行粒子束通过 $P$ 孔后宽度变为原来的一半. 进一步研究还可得到区域 Ⅰ 和 Ⅱ 中两个磁场的比值，同区域 Ⅰ 和 Ⅱ 中的平行粒子束宽度的比值是倒数的关系. 因此，磁聚焦模型中的磁区设计，为获取不同宽度的平行粒子束以及改变运动过程中平行粒子束的宽度，提供了理论上的支持，扩大了平行粒子束在科学研究中的应用范围.

**参 考 文 献**


1　倪富昌. 磁约束与真假磁聚焦. 中学物理，2015，33(15)：92 ～ 93


(上接第 51 页)

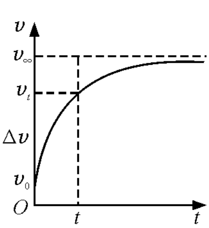
可知时间常数为 $\tau=\dfrac{m}{k}$，稳态速度为 $v_\infty=\dfrac{F}{k}$. 已知初速度为 $v_0$，可知速度关系式为

$$v=v_\infty+(v_0-v_\infty)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{mg}{k}+(v_0-\frac{mg}{k})\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

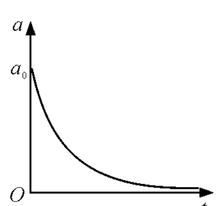
取导数可得加速度为

$$a=\left(g-\frac{kv_0}{m}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=a_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

速度图像如图 4(a) 所示，加速度图像如图 4(b) 所示，都存在水平渐近线，这种加速运动过程是瞬态过程.



(a) $v$-$t$图像



(b) $a$-$t$图像

图 4

空气阻力的冲量为 $\overline{f}\cdot\Delta t=kx$，对雨滴的运动过程由动量定理有 $mgt-kx=mv-mv_0$.

由此可得位移随时间变化的关系式为

$$x=\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}(v-v_0)=\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k}-v_0\right)(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$$

考虑到图 2(a) 中的凹边梯形与图 4(a) 中的凹边梯形相似，那么对于图 4(a)，速度图线与时间轴围成的凸边梯形面积等于对应的矩形面积 $S_1=v_\infty t$ 与凹边梯形面积 $S_2=\Delta v\cdot\tau$ 之差. 其中

$$\Delta v=v_t-v_0=(v_\infty-v_0)(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$$

从命题角度而言，为了保证空气阻力与速率成正比，稳态速度 $v_\infty=\dfrac{F}{k}$ 的值不能太大，那么 $k$ 取值应较大，因此时间常数 $\tau=\dfrac{m}{k}$ 很小，则 $t=5\tau$ 较小，所以雨滴将很快达到稳态速度.

只要物体受到线性阻力 $f=kv$ 的作用做减速运动，或者物体在恒力 $F$ 和线性阻力 $f$ 共同作用下做减速直线运动或加速直线运动，物体将趋于停止或趋于匀速运动，有关物理量随时间变化的过程是瞬态过程.

**参 考 文 献**


1　黄俊生. 关于“另类匀变速运动”的变化规律. 物理教师，2015，36(9)：封三

2　赵静玲，戴儒京. 电磁感应习题的另类解法. 物理教学，2010，32(2)：42 ～ 44

3　杨榕楠. 科学探究的序曲. 中学物理教学参考，2010，39(8)：2 ～ 6

4　张军. 浅谈物体速度的变化对位移是均匀的变速运动. 物理教师，2014，35(8)：58 ～ 59

5　岳守凯. 探究雨滴的形成与运动. 物理教学，2011，32(2)：51 ～ 52

6　郑金. 利用结论巧解“甲虫和橡胶带”问题. 物理通报，2012(4)：61 ～ 63