两个物块所受的摩擦力如何变化

宋辉武
（鄂尔多斯市第一中学 内蒙古 鄂尔多斯 017010）
赵林明
（广东实验中学 广东 广州 510375）

（收稿日期：2016－10－23）

摘　要：剖析在自主招生和竞赛中经常会遇到的一道典型习题，发现其原参考答案解释的有些牵强，而很多人对这个模型似乎都理解的不够深刻，鉴于此，笔者深入探究了这一问题，揭开这种运动情境所隐含的玄机，希望能对广大同仁有所帮助.

关键词：转动　静摩擦力　相对滑动　最大角速度

【题目】 如图1所示，一圆台绕其轴线 MN 在水平面内转动，另有质量分别为 m_A 和 m_B（$m_A > m_B$）的 A 和 B 两个物体，它们与台面间的静摩擦因数为 μ，现用一根长为 l 的绳子将它们连接. 如果两物体的连线某处经过轴线，且 A 物体与轴间距为 x，则要使物体与台面不发生相对滑动，求允许的最大角速度为多大？

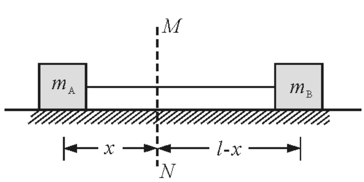

图1　题目附图

原参考答案

$$\begin{cases} T + \mu m_A g = m_A \omega^2 x \\ T - \mu m_B g = m_B \omega^2 (l - x) \end{cases}$$

两个方程联立解得

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{(m_A + m_B) x - m_B l}}$$

所以分3种情况

当 $x > \dfrac{m_B l}{m_A + m_B}$ 时

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{(m_A + m_B) x - m_B l}}$$

当 $x = \dfrac{m_B l}{m_A + m_B}$ 时

$$\omega = \infty$$

即两个物块永远不会滑动.

当 $x < \dfrac{m_B l}{m_A + m_B}$ 时

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{m_B l - (m_A + m_B) x}}$$

剖析：上网搜过该题之后，发现其解题思路皆与原参考答案一致. 笔者认为对该题的深入探究非常有意义，实际上，该题可以作为一道具有一般意义的原始物理问题，因为笔者在教学中发现，在高中普通物理中存在本题的衍生习题，当然难度有所下降. 实际上对于该题，很多人都是知其然而不知其所以然. 简单地列出两个方程似乎并没有挖掘出该题的潜在价值.

首先这个模型不可避免地要讨论随着角速度的变大两个物块所受的静摩擦力是如何变化的，由于静摩擦力是被动力，随着角速度的变化两个物块通过绳子互相制约，所以摩擦力也会发生相应的变化，下面我们来看详细讨论.

不难发现，当 $x = \dfrac{l}{2}$ 时，两个物块所受的摩擦力会同时达到最大静摩擦力，所以这个位置是个临界

点.

(1) 当 $x > \frac{l}{2}$ 时,物块A先达到最大静摩擦力,此时角速度 $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{x}}$,当大于这个值时,绳上开始出现张力,但是物块 A 所受的摩擦力始终保持最大静摩擦力不变,由物块 B 向转动轴靠拢时可列方程

$$\begin{cases} T + \mu m_A g = m_A \omega^2 x \\ T - \mu m_B g \geqslant m_B \omega^2 (l - x) \end{cases}$$

解得

$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{(m_A + m_B) x - m_B l}} > 0$$

即最大角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{(m_A + m_B) x - m_B l}}$$

(2) 当 $x < \frac{l}{2}$ 时,同理,物块B先达到最大静摩擦力,此时 $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l - x}}$,当大于这个值时,绳上开始出现张力,但物块 B 所受摩擦力始终保持最大静摩擦力不变,当物块 A 向转动轴靠拢时可列方程

$$\begin{cases} T + \mu m_B g = m_B \omega^2 (l - x) \\ T - \mu m_A g \geqslant m_A \omega^2 x \end{cases}$$

解得

$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{m_B l - (m_A + m_B) x}}$$

而此时 $\sqrt{\frac{\mu (m_A + m_B) g}{m_B l - (m_A + m_B) x}}$ 并不恒大于零,仅当 $x < \frac{m_B l}{m_A + m_B}$ 时才能成立. 那么对于 $\frac{m_B l}{m_A + m_B} < x < \frac{l}{2}$ 这一段如何求解呢? 下面我们继续讨论.

容易得出,当 $x > \frac{l}{2}$,物块 A 达到最大静摩擦力时,角速度值为 $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{x}}$,当角速度继续增大时,设此时物块 B 的静摩擦力为 f_B,则可列

$$\begin{cases} T + \mu m_A g = m_A \omega^2 x \\ T + f_B = m_B \omega^2 (l - x) \end{cases}$$

解得

$$f_B = [m_B l - (m_A + m_B) x] \omega^2 + \mu m_A g$$

$$\left(\omega \geqslant \sqrt{\frac{\mu g}{x}}\right)$$

由于 $x > \frac{l}{2}$,所以

$$m_B l - (m_A + m_B) x < 0$$

即 f_B 是关于 ω^2 的单调减函数,就是说随着角速度的增大,物块 B 所受的静摩擦力会由方向向左,大小为 $\frac{\mu m_B g (l - x)}{x}$ 逐渐减小到零,再反向逐渐增大,当增大到其最大静摩擦力时就会发生滑动,即情况(1).

同理当 $x < \frac{l}{2}$,物块B达到最大静摩擦力时,角速度值为 $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l - x}}$,当角速度增大时,设此时物块 A 的摩擦力为 f_A,则可列

$$\begin{cases} T + f_A = m_A \omega^2 x \\ T + \mu m_B g = m_B \omega^2 (l - x) \end{cases}$$

解得

$$f_A = [(m_A + m_B) x - m_B l] \omega^2 + \mu m_B g$$

$$\left(\omega \geqslant \sqrt{\frac{\mu g}{l - x}}\right)$$

当 $x < \frac{m_B l}{m_A + m_B}$ 时

$$(m_A + m_B) x - m_B l < 0$$

即 f_A 是关于 ω^2 的单调减函数,也就是说随着角速度的增大,物块 A 所受的静摩擦力会由方向向右,大小为 $\frac{\mu m_A g x}{l - x}$,逐渐减小到零,再反向逐渐增大,当增大到其最大静摩擦力时就会发生滑动,即情况(2);

当 $\frac{m_B l}{m_A + m_B} < x < \frac{l}{2}$,$(m_A + m_B) x - m_B l > 0$,即 f_A 是关于 ω^2 的单调增函数,也就是说随着角速度的增大,物块 A 所受的静摩擦力会始终向右并且逐渐增大,直至增大到最大静摩擦力 $\mu m_A g$. 此时的角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu (m_A - m_B) g}{(m_A + m_B) x - m_B l}}$$

绳上张力

$$T=\frac{\mu m_{A} m_{B}(l-2x)}{(m_{A}+m_{B})x-m_{B}l}$$

由此可以发现，只有当$\frac{m_{B}l}{m_{A}+m_{B}}<x\leqslant\frac{l}{2}$时，两个物块才可能同时受到方向皆指向转动轴的最大静摩擦力(当然这一点由 $T\geqslant 0$ 也可得出)．此时若想要两物块皆保持匀速圆周运动，则可以列出

$$\begin{cases}T_{1}+\mu m_{A}g=m_{A}\omega^{2}x\\T_{2}+\mu m_{B}g=m_{B}\omega^{2}(l-x)\end{cases}$$

则

$$T_{1}-T_{2}=$$
$$[(m_{A}+m_{B})x-m_{B}l]\omega^{2}-(\mu m_{A}g-\mu m_{B}g)$$

当角速度继续增大时，由于$T_{1}>T_{2}$，所以以后物块 B 所受的静摩擦力会从 $\mu m_{B}g$ 逐渐减小到零再反向逐渐增大，最终发生滑动，即又变成情况(1)．

结论：

(1) 当 $x>\frac{l}{2}$ 时，物块 A 所受的摩擦力方向始终指向转动轴并且逐渐增大到 $\mu m_{A}g$ 保持不变，而物块 B 所受的摩擦力的方向刚开始指向转动轴，大小逐渐增大到某一最大值(小于 $\mu m_{B}g$)，然后逐渐减小到零，再反向逐渐增大直至发生滑动(物块 A 先增加到最大静摩擦力)；

(2) 当 $x=\frac{l}{2}$ 时，两个物块同时增加到最大静摩擦力，且方向皆指向转动轴，然后物块 A 所受的摩擦力保持最大值不变，而物块 B 所受的摩擦力逐渐减小然后反向逐渐增大直至滑动；

(3) 当$\frac{m_{B}l}{m_{A}+m_{B}}<x<\frac{l}{2}$时，物块 B 先增加到最大静摩擦力，此时物块 A 受一个静摩擦力，然后物块 B 暂时保持最大静摩擦力不变，而物块 A 的摩擦力将逐渐增大到最大静摩擦力以后保持不变，但是物块 B 所受的摩擦力会逐渐减小到零然后反向增大直至滑动；

(4) 当 $x<\frac{m_{B}l}{m_{A}+m_{B}}$ 时，物块 B 所受的摩擦力逐渐增大到最大静摩擦力保持不变其方向始终指向转动轴，物块 A 所受的摩擦力的方向刚开始指向转动轴，大小逐渐增大到某一最大值，然后逐渐减小到零，再反向逐渐增大直至发生滑动(物块 B 先增加到最大静摩擦力)；

(5) 当 $x=\frac{m_{B}l}{m_{A}+m_{B}}$ 时，两个物块所受的摩擦力皆逐渐增大到 $\mu m_{B}g$ 并保持不变，方向始终指向转动轴．

【衍生习题】如图 2 所示，两物块 A 和 B 套在水平粗糙的 CD 杆上，并用不可伸长的轻绳连接，整个装置能绕过 CD 中点的轴 OO' 转动，已知两物块质量相等，杆 CD 对物块 A 和 B 的最大静摩擦力大小相等，开始时绳子处于自然长度(绳子恰好伸直但无弹力)，物块 A 到 OO' 轴的距离为物块 B 到 OO' 轴距离的两倍．现让该装置从静止开始转动，使转速逐渐增大，在从绳子处于自然长度到两物块 A 和 B 即将滑动的过程中，下列说法中正确的是(　　)

A. B 受到的静摩擦力一直增大

B. B 受到的静摩擦力是先增大后减小

C. A 受到的静摩擦力是先增大后减小

D. A 受到的合外力一直在增大

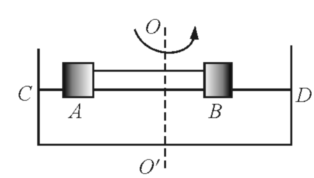

图 2　衍生习题题图

解析：这是《考点同步解读》上选取的一道习题，由于该衍生习题的两个物块的质量相等，这使得$\frac{m_{B}l}{m_{A}+m_{B}}=\frac{l}{2}$，因此该题相对来说比母题简单得多，本题中相当于 $x=\frac{2}{3}l>\frac{1}{2}l$，因此取上述“结论”中的第一个，可见，$A$ 受到的静摩擦力是先增大后不变；B 受到的静摩擦力是先增大后减小然后又反向增大，即 A，B，C 均错，因为合外力提供向心力，所以 A 和 B 所受合外力都随转速增大而增大，D 正确．

参 考 文 献

1　范小辉．高校自主招生考试直通车．上海：上海交通大学出版社，2014

2　王后雄．考点同步解读．武汉：华中师范大学出版社，2016.5